УДК 539.3

Н.П.Флейшман

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ СПРЯЖЕННЯ ДЕФОРМІВНОГО СЕРЕДОВИЩА З ТОНКИМ ПРОШАРКОМ

1. Розглянемо спряження двох просторових тіл за допомогою ізотропного криволінійного деформівного прошарку малої товщини $2h = const$[1]. Припускаємо, що компоненти деформації прошарку досить малі порівняно з одиницею. Тоді, як відомо, у виразах для складових тензора деформації через компоненти переміщень можна відкинути квадратичні члени і знехтувати в процесі складання рівнянь рівноваги зміною координат середовища. При малих деформаціях можливі також різноманітні нелінійні зв"язки між компонентами тензорів напружень / σ_{ik} / і деформацій / ε_{ik} /.

Якщо віднести тонкий прошарок до змішаної триортогональної системи координат / α_1, α_2, z /, де α_1, α_2 – криволінійні координати в його серединній поверхні а вісь z направлена по нормалі до неї, то загальна форма рівнянь стану матиме вигляд [1]

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3} I_1 H_i^2 + \frac{3}{2\varphi^*}\left(\sigma_{ii} - \sigma H_i^2\right),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{3} I_1 + \frac{3}{2\varphi^*}\left(\sigma_{33} - \sigma\right), \quad \varepsilon_{ik} = \frac{3}{2\varphi^*}\sigma_{ik}, \quad (ik = 1,2;\ i \neq k) \qquad /1/$$

або

$$\sigma_{jj} = \sigma H_j^2 + \frac{2}{3}\varphi^*\left(\varepsilon_{jj} - e H_j^2\right) \qquad (j = 1,2),$$

$$\sigma_{33} = \sigma + \frac{2}{3}\varphi^*\varepsilon_{ik}; \quad \sigma_{ik} = \frac{2}{3}\varphi^*\varepsilon_{ik} \qquad (i \neq k), \qquad /2/$$

де

$$\varphi^* = \sigma_i / e_i; \quad H_k = A_k(\alpha_1, \alpha_2)\left(1 + \frac{z}{R_k}\right); \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3\Pi_2 - \Pi_1^2};$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3I_2 - I_1^2}; \quad \sigma = \frac{1}{3}\Pi_1; \quad e = \frac{1}{3}I_1;$$

I_1, I_2 – базисні інваріанти тензора деформацій в ейлеровому представленні; Π_1, Π_2 – інваріанти тензора напружень;

$A_\kappa(\alpha_1, \alpha_2)$- коефіцієнти Ляме першої квадратичної форми серединної поверхні прошарку; R_κ - її головні радіуси кривизни.

Для випадку малих деформацій тонкого неоднорідного шару вважаємо

$$\varphi^* = \lambda^* \varphi(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}), \quad \sigma = \lambda^* e, \quad \lambda^* \equiv \lambda^*(\alpha_1, \alpha_2). \qquad /3/$$

У частковому випадку $\varphi^* = 3\mu$, $\lambda^* = 3\lambda + 2\mu$, $\varphi = 3(1-2\nu)/2(1+\nu)$, де λ, μ - сталі Ляме; ν - коефіцієнт Пуассона/ співвідношення /2/ перетворюються в узагальнений закон Гука для ізотропного неоднорідного матеріалу.

Використовуючи відомі геометричні співвідношення між ε_{ik} та компонентами переміщен[illegible] u_1, u_2, u_3, рівняння рівноваги просторової теорії пружнос[illegible] при відсутності масових сил [2, 3], а також формули /2/-/3/, можна вивести замкнену систему шести нелінійних розв"язуючих диференціальних рівнянь з частковими похідними першого порядку відносно функцій

$$\sigma_{13}, \ \sigma_{23}, \ \sigma_{33}, \ u_1, \ u_2, \ u_3, \qquad /4/$$

які визначають контактні напруження та компоненти вектора переміщення на поверхнях $z = \pm h$, вздовж яких має місце спай прошарку з відповідними тілами:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(H_i^2 H_j \sigma_{i3}\right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left[H_1 H_2 (\lambda^* F_{1i}\varepsilon_{11} + \lambda^* F_{ji}\varepsilon_{22} + F_{3i}\sigma_{33})\right] -$$

$$- \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\lambda^* \varphi H_i^2 \varepsilon_{12}\right) + \lambda^*(\psi_{ii}\varepsilon_{ii} + \psi_{ij}\varepsilon_{jj}) + \psi_i \sigma_{33} \equiv f_i$$

$$(i, j = 1, 2 \ ; \ i \neq j);$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(H_1 H_2 \sigma_{33}\right) = -\sum_{\kappa=1}^{2}\frac{\partial}{\partial \alpha_\kappa}\left(H_1 H_2 H_\kappa^{-1} \sigma_{\kappa 3}\right) +$$

$$+ \varphi_{14}\sigma_{33} + \lambda^*\left(\varphi_6 \varepsilon_{11} + \varphi_7 \varepsilon_{22}\right) \equiv f_3 \ ; \qquad /5/$$

$$\lambda^* \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_i}{H_i}\right) = \frac{1}{H_i}\left(\frac{3}{\varphi}\sigma_{i3} - \lambda^* H_i^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i}\right) \equiv f_{i+3}$$

$$(i,j=1,2), \quad i\neq j;$$

$$\lambda^* \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{1}{\varphi_8}\left[3\sigma_{33} + \lambda^* \varphi_9 \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right)\right] \equiv f_6 .$$

Тут позначено

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{u_j}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} + \frac{u_3}{H_i} \cdot \frac{A_i}{R_i};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2 H_1 H_2}\left[H_1^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{H_1}\right) + H_2^2\left(\frac{u_2}{H_2}\right)\right];$$

$$F_{1K} = \frac{2}{3}\varphi\left(1 + F_{3K}\right); \quad F_{2K} = \frac{2}{3}\varphi F_{3K}; \quad F_{3K} = \frac{F}{\varphi_8} H_K^2;$$

$$(K=1,2);$$

$$F = 1 - \frac{2}{3}\varphi; \quad \Psi_n = \frac{1}{2} H_1 H_2 F_{3n} \sum_{K=1}^{2} \frac{1}{H_K^2} \frac{\partial H_K^2}{\partial \alpha_n}, \qquad /6/$$

$$\Psi_{nm} = H_1 H_2\left[\frac{1}{3}\varphi \frac{1}{H_m^2}\frac{\partial H_m^2}{\partial \alpha_n} + \frac{1}{2} F_{2n} \sum_{K=1}^{2} \frac{1}{H_K^2} \cdot \frac{\partial H_K^2}{\partial \alpha_n}\right]; \quad (n,m=1,2)$$

$$\varphi_6 = \varphi_{41} H_2 \frac{A_1}{R_1} + \varphi_{52} H_1 \frac{A_2}{R_2}; \quad \varphi_7 = \varphi_{51} H_2 \frac{A_1}{R_1} + \varphi_{42} H_1 \frac{A_2}{R_2}$$

$$\varphi_{pK} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\varphi_0}{\varphi_8} + (-1)^n \frac{2}{3}\varphi - (-1)^K \varphi_{13}\right]; \quad (p=4,5)$$

$$\varphi_{14} = \varphi_{31} H_2 \frac{A_1}{R_1} + \varphi_{32} H_1 \frac{A_2}{R_2};$$

$$\varphi_{3k} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{\varphi_8} - 1 - (-1)^k \varphi_{12}\right];$$

$$\varphi_8 = 3 - \left(1 - \frac{2}{3}\varphi\right)\left(H_1^2 + H_2^2\right);$$

$$\varphi_9 = (2\varphi - 3)\left[1 - \frac{1}{3}\left(H_1^2 - H_2^2\right)\right];$$

$$\varphi_{12} = \frac{\varphi_2}{2\varphi_8}\left(H_1^2 - H_2^2\right); \quad \varphi_2 = 2 - \frac{4}{3}\varphi;$$

$$\varphi_{13} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\varphi\right)\left(H_1^2 - H_2^2\right)\left(1 + \frac{\varphi_9}{\varphi_8}\right).$$

2. Для виведення умов спряження просторових тіл за допомогою тонкого ізотропного нелінійно деформівного прошарку дискретизуємо область, яку він займає, лише вздовж осі z, беручи три точки $z = 0$, $z = \pm h$. Записуючи рівняння /6/ у точці $z = 0$, замінюємо першу похідну по z відповідним різницевим аналогом з точністю $O(h^2)$, тобто

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[f(\alpha_1, \alpha_2, z)\right] = \frac{1}{2h}\left[f(\alpha_1, \alpha_2, h) - f(\alpha_1, \alpha_2, -h)\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2h}\left[f^+(\alpha_1, \alpha_2) - f^-(\alpha_1, \alpha_2)\right] \equiv \frac{1}{2h}\left(f^+ - f^-\right). \qquad /7/$$

Величини правих частин рівняння /6/ в точці $z = 0$ заміняємо їх середніми значеннями

$$f_k^0 \equiv f_k(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \frac{1}{2}\left(f_k^+ + f_k^-\right), \quad (k = \overline{1,6}). \qquad /8/$$

Враховуючи /7/–/8/, виводимо з /5/:

$$\left(H_i^2 H_j \sigma_{i3}\right)^+ - \left(H_i^2 H_j \sigma_{i3}\right)^- = h\left(f_i^+ + f_i^-\right),$$

$$\left(H_1 H_2 \sigma_{33}\right)^+ - \left(H_1 H_2 \sigma_{33}\right)^- = h\left(f_3^+ + f_3^-\right),$$

$$\lambda^*\left[\left(\frac{u_i}{H_i}\right)^+ - \left(\frac{u_i}{H_i}\right)^-\right] = h\left(f_{i+3}^+ + f_{i+3}^-\right), \qquad /9/$$

$$\lambda^*\left(u_3^+ - u_3^-\right) = h\left(f_6^+ + f_6^-\right), \quad (i,j = 1,2;\ i \neq j).$$

Зауважимо, що за умовами ідеального контакту між тонким прошарком та просторовими тілами, які він з"єднує, величини $u_1^\pm$, $u_2^\pm$, $u_3^\pm$, $\sigma_{13}^\pm$, $\sigma_{23}^\pm$, $\sigma_{33}^\pm$ в прошарку дорівнюють зміщенням та контактним напруженням у відповідних тілах на поверхнях $z = \pm h$. Отже, формули /9/ встановлюють нелінійну залежність між зміщеннями та контактними напруженнями на поверхнях $z = \pm h$ в тілах, які з"єднує тонкий прошарок, тобто вони є шуканими умовами спряження.

3. У частковому випадку плоскої деформації тіл з плоским прошарком, тобто при $H_1 = H_2 = 1$, $u_2^\pm = \sigma_{23}^\pm = 0$, $\varepsilon_{12}^\pm = \varepsilon_{22}^\pm = 0$, $\psi_{21} = \psi_{12} = \psi_2 = 0$; $f_2 = f_5 = 0$; $\psi_{nm} = \psi_n = 0$, умови спряження /9/ значно спрощуються і набувають вигляду

$$\sigma_{q3}^+ - \sigma_{q3}^- = h\left(f_q^+ + f_q^-\right); \quad \lambda^*\left(u_q^+ - u_q^-\right) = h\left(f_{q+3}^+ + f_{q+3}^-\right) \qquad /10/$$

$$(q = 1,3),$$

де

$$f_1 = -\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{4\lambda^*\varphi(3+\varphi)}{3(3+4\varphi)} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + \frac{3-2\varphi}{3+4\varphi}\sigma_{33}\right],$$

$$f_3 = -\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\sigma_{13}; \quad f_4 = \frac{3}{\varphi}\sigma_{13} - \lambda^*\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1}, \qquad /11/$$

$$f_6 = \frac{3}{3+4\varphi}\left[3\sigma_{33} + \frac{1}{3}\lambda^*(2\varphi - 3)\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}\right].$$

При $\lambda^* = 3\lambda + 2\mu = const$, $\varphi = 3(1-2\nu)/2(1+\nu) = const$ з /9/ одержуємо відомі умови спряження для тіл з тонким однорідним прошарком із лінійно-пружного матеріалу [4]. При $\lambda^* = 0$ /прошарку немає/ для б[illegible]-якого h маємо $\sigma_{13}^{\pm} = \sigma_{33}^{\pm}$ /умови вільного краю/, чого і слід було чекати.

1. Гольденблат И.И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М., 1955. 2. Лурье А.И. Теория упругости. М., Наука, 1970. 939 с. 3. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975. 4. Флейшман Ф.Н. Деформативность кусочно-однородных тел с тонкими промежуточными прослойками: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1985.

Стаття надійшла до редколегії 05.02.90

УДК 517.91/517.93

Н.П.Флейшман, О.Б.Олексів

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Математичною моделлю задачі статики осесиметричних і неосесиметричних складених оболонок обертання з малими видавками є, зокрема, багатоточкова задача спряження для системи шести, восьми або десяти звичайних диференціальних рівнянь першого порядку зі змінними коефіцієнтами [1, 2]. У зв"язку з цим нижче розглядається така задача.

Необхідно визначити вектор-функції $W_j(s, a_j)$ розміру $2m$, які задовольняють рівняння

$$\dot{W}_j(s, a_j) = A_j(s)\, W_j(s, a_j) + f_j(s)$$
$$(j = \overline{1, N};\ a_{j-1} \le s \le a_j), \qquad /1/$$

де $A_j(s)$ – відомі квадратні матриці, а $f_j(s)$ – задані вектори-стовбці розміру $2m$. Для функцій W_j тут прийнято позначення $W_j(s, a_j)$, щоб підкреслити її залежність від координати a_j.

Крім рівнянь /1/, задано також крайові умови

$$B_0(a_0)\, W_1(a_0, a_1) = \Gamma_0,$$
$$D_N(a_N)\, W_N(a_N, a_N) = \Gamma_N \qquad /2/$$