При $\lambda^* = 3\lambda + 2\mu = const$, $\varphi = 3(1-2\nu)/2(1+\nu) = const$ з /9/ одержуємо відомі умови спряження для тіл з тонким однорідним прошарком із лінійно-пружного матеріалу [4]. При $\lambda^* = 0$ /прошарку немає/ для б...-якого h маємо $\sigma_{13}^{\pm} = \sigma_{33}^{\pm}$ /умови вільного краю/, чого і слід було чекати.

І. Гольденблат И.И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М., 1955. 2. Лурье А.И. Теория упругости. М., Наука, 1970. 939 с. 3. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975. 4. Флейшман Ф.Н. Деформативность кусочно-однородных тел с тонкими промежуточными прослойками: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1985.

Стаття надійшла до редколегії 05.02.90

УДК 517.91/517.93

Н.П.Флейшман, О.Б.Олексів

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Математичною моделлю задачі статики осесиметричних і неосесиметричних складених оболонок обертання з малими видавками є, зокрема, багатоточкова задача спряження для системи шести, восьми або десяти звичайних диференціальних рівнянь першого порядку зі змінними коефіцієнтами [1, 2]. У зв"язку з цим нижче розглядається така задача.

Необхідно визначити вектор-функції $W_j(s, a_j)$ розміру $2m$, які задовольняють рівняння

$$\dot{W}_j(s, a_j) = A_j(s) W_j(s, a_j) + f_j(s)$$
$$(j = \overline{1, N};\ a_{j-1} \leq s \leq a_j), \qquad /1/$$

де $A_j(s)$ - відомі квадратні матриці, а $f_j(s)$ - задані вектори-стовбці розміру $2m$. Для функцій W_j тут прийнято позначення $W_j(s, a_j)$, щоб підкреслити її залежність від координати a_j.

Крім рівнянь /1/, задано також крайові умови

$$B_0(a_0) W_1(a_0, a_1) = \Gamma_0,$$
$$D_N(a_N) W_N(a_N, a_N) = \Gamma_N \qquad /2/$$

і умови спряження

$$B_j(a_j)W_j(a_j,a_j) = D_j(a_j)W_{j+1}(a_j,a_{j+1})$$
$$(j=\overline{1,N-1}). \qquad /3/$$

Через $B_j(a_j)$ і $D_j(a_j)$ тут позначено відомі квадратні матриці розміру $2m$; $B_0(a_0)$, $D_N(a_N)$– задані прямокутні матриці розміру $/m\times 2m/$; Γ_0, Γ_N – задані вектори розміру m .

Для розв"язування задачі /I/–/3/ скористаємося методом інваріантного занурення [3] у поєднанні з методом початкових параметрів.

Розглянемо спочатку перший інтервал $a_0 \leq S \leq a_1$, вимагатимемо, щоб шукана функція $W_1(S,a_1)$задовольняла рівняння /I/ при $j=1$ і першу крайову умову /2/ в точці $S=a_0$. А в точці $S=a_1$ замість /3/ задамо умову

$$D(a_1)W_1(a_1,a_1) = \Gamma_1 , \qquad /4/$$

де

$$\Gamma_1 = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k I_k ,$$

$D(a_1) = [D(T)]_{T=a_1}$ – довільно задана прямокутна матриця розміру $m\times 2m$; $I_K = /0, \ldots, 0, 1, 0, 0 \ldots, 0/^T$. Одиниця займає тут місце K -го елемента; γ_K – сталі коефіцієнти, які підлягають визначенню.

Згідно з методом інваріантного занурення зводимо крайову задачу для першого інтервалу до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь відносно допоміжних функцій $m_K(T)$, $(K=\overline{1,m})$ і $r(T) = W_1(T,T) = \sum_{K=0}^{m} \gamma_K r_K(T)$

$$\gamma_0 = 1 , \quad a_0 \leq T \leq a_1 , \qquad /5/$$

а саме:

$$m_K'(T) = A_1(T)m_K(T) - \sum_{\nu=1}^{m} I_\nu^T \beta(m_K,0)m_\nu(T) ; \qquad /6/$$

$$r_n'(T) = A_1(T)r_n(T) + f_1(T) - \qquad /7/$$
$$-\sum_{K=1}^{m} I_K^T \beta(r_n, f_1)m_K(T)$$
$$(K=\overline{1,m} ; \quad n=\overline{0,m})$$

$$m_k(a_0)=\begin{bmatrix}B_0(a_0)\\ D(a_0)\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ I_k\end{pmatrix},$$

$$r_0(a_0)=\begin{bmatrix}B_0(a_0)\\ D(a_0)\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Gamma_0\\ 0\end{pmatrix} \qquad /8/$$

$$r_k(a_0)=\begin{bmatrix}B_0(a_0)\\ D(a_0)\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ I_k\end{pmatrix}.$$

Тут позначено

$$\beta(r,f)=[D(T)A_1(T)+D'(T)]r(T)+D(T)f(T). \qquad /9/$$

Легко перевірити, що структура квазілінійної системи /7/ дає змогу скористатися принципом накладення /5/.

Розв"язуючи чисельно задачу Коші /6/-/8/, визначаємо, зокрема, значення функцій $r_n(T)$ у точці $T=a_1$, тобто вектори $r_n(a_1)$, які будуть нам потрібні надалі.

Дійсно, якщо шукати функції $W_j(s,a_1)$ у вигляді

$$W_j(s,a_j)=\sum_{n=0}^{m}\gamma_n W_{j,n}(s,a_j) \qquad /10/$$

$$(\gamma_0=1;\ j=\overline{1,N}),$$

то функції $W_{j,n}$ повинні задовольняти в області $a_j\le s\le a_{j+1}$ рівняння /див. /1//

$$\dot W_{j,n}(s,a_j)=A_j(s)W_{j,n}(s,a_j)+f_j(s)\delta_{0,n} \qquad /11/$$

$(n=\overline{0,m};\ \delta_{0,n}$ – символ Кронекера/ і відповідні початкові умови. Для функцій $W_{1,n}(s,a_1)$, $(n=\overline{0,m})$ згідно з /5/ знаходимо початкові значення в точці $s=a_1$:

$$W_{1,n}(a_1,a_1)=r_n(a_1), \qquad /12/$$

отже, функції $W_{1,n}(s,a_1)$ можна визначити, розв"язуючи чисельно задачу Коші для рівнянь /11/ при $j=1$ з початковими умовами /12/. Для знаходження початкових значень решти функцій $W_{j+1,n}(s,a_j)$ при $j=\overline{1,N-1}$ підставляємо /10/ в умови спряження /3/, звідки маємо

$$W_{j+1,n}(a_j,a_{j+1})=[D_j(a_j)]^{-1}B_j(a_j)W_{j,n}(a_j,a_j) \qquad /13/$$

$$(j=\overline{1,N-1}).$$

Отже, розв"язуючи чисельно задачі Коші /11/, /13/, послідовно знаходимо вектор-функції $W_{2,n}(s,a_2),\dots,W_{N,n}(s,a_N)$ і нарешті – числа $W_{N,n}(a_N,a_N)$, $(n=\overline{0,m})$.

Підставляючи врешті /10/ в другу крайову умову /2/, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів γ_K

$$\sum_{K=1}^{m} \gamma_K W_{N,K}(a_N, a_N) = [D_N(a_N)]^{-1} \Gamma_N - W_{N,0}(a_N, a_N). \quad /14/$$

Знаючи коефіцієнти γ_K, визначаємо всі шукані вектор-функції за формулами /10/. Таким чином, поставлена багатоточкова задача спряження повністю розв"язана. Алгоритм цього розв"язку реалізовано у вигляді Фортран-програми для ОМ ЕС-1045, за допомогою якої можна розрахувати, зокрема, складені оболонки обертання з малими видавками або ребрами жорсткості.

1. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь Я.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. К., 1986. 2. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1979. 3. Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. М., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.90

УДК 539.3:519.6

Г.А. Шинкаренко

АПРОКСИМАЦІЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОВ"ЯЗКОПРУЖНОСТІ*
I. НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГАЛЬОРКІНА

У праці [5] з урахуванням ненульового струму провідності та в"язкості та в"язкості за Фойгтом сформульовано початково-крайову задачу електров"язкопружності та відповідну їй варіаційну задачу в термінах пружних зміщень та електричного потенціалу. Там же при практично вживаних допущеннях відносно даних задачі доведено існування єдиного розв"язку варіаційної задачі, що володіє скінченною енергією.

У даній статті будується чисельна схема розв"язування згаданої задачі, в основу якої покладено напівдискретизацію Гальоркіна з використанням просторів апроксимацій методу скінченних елементів та однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі. У першій частині наведено основні співвідношення для знаходження напівдискретних апроксимацій та обчислено апріорні оцінки швидкості їх збіжності.

* Присвячено професору Н.П.Флейшману з нагоди його 70-річчя.