Підставляючи врешті /10/ в другу крайову умову /2/, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів γ_K

$$\sum_{K=1}^{m} \gamma_K W_{N,K}(a_N, a_N) = [D_N(a_N)]^{-1} \Gamma_N - W_{N,0}(a_N, a_N). \quad /14/$$

Знаючи коефіцієнти γ_K, визначаємо всі шукані вектор-функції за формулами /10/. Таким чином, поставлена багатоточкова задача спряження повністю розв"язана. Алгоритм цього розв"язку реалізовано у вигляді Фортран-програми для ОМ ЕС-1045, за допомогою якої можна розрахувати, зокрема, складені оболонки обертання з малими видавками або ребрами жорсткості.

1. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь Я.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. К., 1986. 2. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1979. 3. Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. М., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.90

УДК 539.3:519.6

Г.А.Шинкаренко

АПРОКСИМАЦІЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОВ"ЯЗКОПРУЖНОСТІ*
I. НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГАЛЬОРКІНА

У праці [5] з урахуванням ненульового струму провідності та в"язкості та в"язкості за Фойгтом сформульовано початково-крайову задачу електров"язкопружності та відповідну їй варіаційну задачу в термінах пружних зміщень та електричного потенціалу. Там же при практично вживаних допущеннях відносно даних задачі доведено існування єдиного розв"язку варіаційної задачі, що володіє скінченною енергією.

У даній статті будується чисельна схема розв"язування згаданої задачі, в основу якої покладено напівдискретизацію Гальоркіна з використанням просторів апроксимацій методу скінченних елементів та однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі. У першій частині наведено основні співвідношення для знаходження напівдискретних апроксимацій та обчислено апріорні оцінки швидкості їх збіжності.

* Присвячено професору Н.П.Флейшману з нагоди його 70-річчя.

1. Постановка задачі. Нехай п"єзоелектрик займає обмежену зв"язну область Ω точок $x=(x_1,\ldots,x_n)$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем границею Γ. Позначимо через $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Далі будемо вважати, що частина границі Γ_u, $mes(\Gamma_u)>0$, нерухома, на одному з електродів Γ_p п"єзоелектрика, $mes(\Gamma_p)>0$, електричний потенціал прийнято нульовим, а інший його електрод Γ_j підключено в зовнішнє електричне коло.

Позначимо через

$$V=\{v\in H^1(\Omega)^n \mid v=0 \text{ на } \Gamma_u\}$$
$$Q=\{q\in H^1(\Omega) \mid q=0 \text{ на } \Gamma_p; \; q=const \text{ на } \Gamma_j\}$$

простори допустимих векторів пружних зміщень та електричних потенціалів відповідно. Тоді на основі принципу віртуальних робіт можна сформулювати [ ] наступну варіаційну задачу електров"язкопружності:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{задано } u_0\in V, \; v_0\in H, \; p_0\in Q, \\ \quad l\in L^2(0,T;V'), \quad r\in L^2(0,T;Q'); \\ \text{знайти пару } \varphi=(u,p)\in L^2(0,T;V\times Q) \text{ таку, що} \\ m(u''(t),v)+a(u'(t),v)+c(u(t),v)-e(v,p(t))=\langle l(t),v\rangle \\ \qquad \ni(p'(t),q)+z(p(t),q)+e(u'(t),q)=\langle r(t),q\rangle \\ c(u(0)-u_0,v)=0, \; m(u'(0)-v_0,v)=0 \\ \qquad \ni(p(0)-p_0,q)=0 \quad \forall (v,q)\in V\times Q. \end{array}\right. \qquad /1.1/$$

Тут $G=L^2(\Omega)$, $H=G^n$, V' та Q' – простори, спряжені до просторів V та Q відповідно; ці та решта позначень запозичено нами з праці [5].

Врешті відзначимо [5], що білінійні форми задачі /1.1/ дають змогу ввести норми

$$\|u\|_H=m^{\frac12}(u,u)$$
$$\|u\|_r=c^{\frac12}(u,u) \qquad \text{/еквівалентна } \|u\|_a=a^{\frac12}(u,u)\text{)}$$
$$\|p\|_Q=\ni^{\frac12}(p,p) \qquad \text{/еквівалентна } \|p\|_z=z^{\frac12}(p,p)\text{)}$$

на просторах H, V та Q відповідно. Більше того, квадрати норм, що визначаються формулами

$$|\varphi(t)|^2=\|u'(t)\|_H^2+\|u(t)\|_V^2+\|p(t)\|_Q^2 \qquad /1.2/$$

$$\|\varphi(t)\|^2=\|u'(t)\|_a^2+\|p(t)\|_z^2,$$

дозволяють обчислювати подвоєне значення повної енергії та дисипацію зв"язаних механічних та електричних полів п"єзоелектрика за розв"язком $\varphi(t)=(u(t),\ p(t))$ задачі /І.І/. Далі нас цікавитиме така характеристика розв"язку:

$$|\!|\!|\varphi(t)|\!|\!|^2=|\varphi(t)|^2+\int_0^t\|\varphi(\tau)\|^2 d\tau. \qquad /І.3/$$

2. <u>Напівдискретні апроксимації Гальоркіна.</u> Нехай $\{V_h\}$ – /відповідно $\{Q_h\}$/ послідовність скінченновимірних підпросторів з простору V /відп. Q / така, що

$$\begin{cases} \dim V_h=N(h)=N\xrightarrow[h\to 0]{}\infty, \quad \dim Q_h=M(h)=M\xrightarrow[h\to 0]{}\infty \\ \text{множина } \bigcup_{h>0} V_h \text{ /відп. } \bigcup_{h>0} Q_h\text{/ щільна в } V \text{ /відп. } Q\text{/.}\end{cases} \qquad /2.І/$$

Для кожного фіксованого $h>0$ розв"язок задачі

$$\begin{cases} \text{задано } u_0\in V,\ v_0\in H,\ p_0\in Q,\ (l,r)\in L^2(0,T;V'\times Q'); \\ \text{знайти пару } \varphi_h=(u_h,p_h)\in L^2(0,T;V_h\times Q_h) \text{ таку, що} \\ m(u_h''(t)v)+a(u_h'(t),v)+c(u_h(t),v)-e(v,p_h(t))=\langle l(t),v\rangle \\ \qquad \ni(p_h'(t),q)+z(p_h(t)q)+e(u_h'(t),q)=\langle r(t),q\rangle \\ c(u_h(0)-u_0,v)=0,\quad m(u_h'(0)-v_0,v)=0 \quad \forall v\in V_h \\ \qquad \ni(p_h(0)-p_0,q)=0 \quad \forall q\in Q_h \end{cases} \qquad /2.2/$$

будемо називати напівдискретною /за просторовими змінними/ апроксимацією Гальоркіна розв"язку $\varphi=(u,p)\in L^2(0,T;V\times Q)$ задачі /І.І/.

Якщо $v_1,\dots v_N$ та $q_1,\dots q_M$ бази просторів V_h та Q_h відповідно, то розв"язок задачі /2.2/ записується у вигляді розкладів

$$u_h(t)=\sum_{j=1}^{N}U_j(t)v_j,\quad p_h(t)=\sum_{k=1}^{M}P_k(t)q_k \qquad /2.3/$$

з невідомими коефіцієнтами $U=(U_1(t),\dots,U_N(t))$ та $P(t)=(P_1(t),\dots,P_M(t))$. Підставляючи /2.3/ у рівняння /2.2/ та послідовно приймаючи $v=v_i$, $i=1,\dots,N$, $q=q_n$, $n=1,\dots,M$, приходимо до наступної задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь відносно цих невідомих:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} M & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} U(t)\\ P(t)\end{bmatrix}''+\begin{bmatrix} A & 0\\ \mathcal{E}^T & \ni\end{bmatrix}\begin{bmatrix} U(t)\\ P(t)\end{bmatrix}'+\begin{bmatrix} C & -\mathcal{E}\\ 0 & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} U(t)\\ P(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L(t)\\ R(t)\end{bmatrix} \\ CU(0)=U_0,\ MU'(0)=V_0,\ \ni P(0)=P_0 \qquad \forall t\in(0,T] \end{cases} \qquad /2.4/$$

Оскільки матриці $M=\{m(v_i, v_j)\}_{i,j=1}^{N}$ /відп. $C=\{c(v_i, v_j)\}_{i,j=1}^{N}$/ та $Э=\{э(q_k, q_n)\}_{k,n=1}^{M}$ додатно визначені, як матриці Грамма систем лінійно незалежних функцій $v_1, \ldots, v_N$ та $q_1, \ldots, q_M$ відносно скалярних добутків у просторах H /відп. V / та Q, то задача Коші /2.4/ допускає єдиний розв"язок. Тому для кожного $h>0$ напівдискретна апроксимація Гальоркіна $\varphi_h=(u_h, p_h)$ визначається однозначно у вигляді /2.3/ на інтервалі часу $[0, T]$. Більше того, послідовність розв"язків $\{(u_h, p_h)\}$ володіє обмеженою повною енергією та дисипацією, і тому з неї можна вибрати збіжну підпослідовність, границя якої є розв"язком варіаційної задачі електров"язкопружності /1.1/, див. [5].

Зауваження 2.1. Напівдискретизована задача /2.2/ зберігає властиве задачі /1.1/ рівняння балансу енергії

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_h(t)|^2+\|\varphi_h(t)\|^2=\langle \ell(t), u_h'(t)\rangle+\langle r(t), p_h(t)\rangle. \qquad /2.5/$$

3. Апріорні оцінки напівдискретних апроксимацій. Оцінимо тепер похибку напівдискретизації $\Delta_h(t)=(e_h(t), r_h(t))$, де

$$e_h(t)=u_h(t)-u(t), \qquad r_h(t)=p_h(t)-p(t). \qquad /3.1/$$

Далі нам будуть потрібні оператори ортогонального проектування $\Pi_h: V\to V_h$ та $\pi_h: Q\to Q_h$ відносно скалярних добутків с /. , ./ та э /. , ./ відповідно; тоді, зокрема, для кожного фіксованого t

$$\begin{cases} c(E_h(t), v(t))=0, \quad E_h(t)=u(t)-\Pi_h u(t) \\ \|E_h(t)\|_V\le\|u(t)-v(t)\|_V \quad \forall u(t)\in V \quad \forall v(t)\in V_h \end{cases} \qquad /3.2/$$

$$\begin{cases} э(R_h(t), q(t))=0, \quad R_h(t)=p(t)-\pi_h p(t) \\ \|R_h(t)\|_Q\le\|p(t)-q(t)\|_Q \quad \forall p(t)\in Q \quad \forall q(t)\in Q_h. \end{cases} \qquad /3.3/$$

Беручи до уваги останні позначення, зауважимо, що мають місце такі представлення похибок:

$$e_h(t)=\varepsilon_h(t)-E_h(t), \quad \varepsilon_h(t)=u_h(t)-\Pi_h u(t)\in V_h$$
$$r_h(t)=\rho_h(t)-R_h(t), \quad \rho_h(t)=p_h(t)-\pi_h p(t)\in Q_h.$$

Оскільки похибки $e_h(t)$ та $r_h(t)$ задовольняють однорідні рівняння задачі /2.2/, знаходимо, що

$$\begin{cases} m(\varepsilon''_h(t),v)+a(\varepsilon'_h(t),v)+c(\varepsilon_h(t),v)-e(v,\rho_h(t))= \\ =m(E''_h(t),v)+a(E'_h(t),v)-e(v,R_h(t)) \qquad \forall v\in V_h \\ \ni(\rho'_h(t),q)+z(\rho_h(t),q)+e(\varepsilon'_h(t),q)=z(R_h(t),q)+e(E'_h(t),q) \quad \forall q\in Q_h \\ c(\varepsilon_h(0),v)=0,\ m(\varepsilon'_h(0)-E'_h(0),v)=0 \\ \qquad \ni(\rho_h(0),q)=0. \end{cases} \qquad /3.4/$$

Після підстановки $v=\varepsilon'_h(t)$, $q=\rho_h(t)$ у рівняння /3.4/ обчислимо енергетичне рівняння для похибки $\delta_h(t)=(\varepsilon_h(t),\rho_h(t))$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\delta_h(t)|^2+\|\delta_h(t)\|^2=m(E''_h(t),\varepsilon'_h(t))+a(E'_h(t),\varepsilon'_h(t))+$$
$$+z(R_h(t),\rho_h(t))-e(\varepsilon'_h(t),R_h(t))+e(E'_h(t),\rho_h(t)),$$

звідки приходимо до оцінки вигляду

$$|||\delta_h(t)|||^2\le\|E'_h(0)\|^2_H+K\int_0^t\left\{\|E''_h(\tau)\|^2_H+\|E'_h(\tau)\|^2_V+\|R_h(\tau)\|^2_Q\right\}d\tau \qquad /3.5/$$

Тут і далі символом K ми позначаємо різні додатні константи, значення яких не залежать від величин, що нас цікавлять.

Наостанку, з використанням нерівності трикутника знаходимо апріорні оцінки для похибки напівдискретизації $\Delta_h(t)=(e_h(t),r_h(t))$

$$|||\Delta_h(t)|||^2\le K\left\{\|E'_h(t)\|^2_H+\|E_h(t)\|^2_V+\|R_h(t)\|^2_Q+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\left[\|E''_h(\tau)\|^2_H+\|E'_h(\tau)\|^2_V+\|R_h(\tau)\|^2_Q\right]d\tau\right\} \quad \forall t\in[0,T] \quad \forall t>0. \qquad /3.6/$$

4. Оцінки швидкості збіжності. Допустимо тепер, що щільність вкладення /2.I/ підпростору $Y_h=V_h\times Q_h$ у простір $Y=V\times Q$ характеризується властивістю /типовою для просторів апроксимацій методу скінченних елементів/

$$\begin{cases} \text{для кожної пари } \varphi=(v,p)\in Y\cap H^{k+1}(\Omega)^{n+1},\ k\ge 1, \\ \text{знайдуться } \psi_h=(v_h,q_h)\in Y_h \text{ та } K=const>0 \text{ такі, що} \\ \|\varphi-\psi_h\|_{m,\Omega}\le Kh^{k+1-m}\|\varphi\|_{k+1,\Omega},\quad 0\le m\le k. \end{cases} \qquad /4.I/$$

Тепер ми готові встановити основний результат.

Теорема 4.I /збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна/.

Нехай $\varphi=(u,p)$ – розв"язок варіаційної задачі /I.I/, причому для деякого натурального $k\ge 1$ справедливі включення

$$\begin{cases} u,u',u''\in L^2(0,T;\ V\cap H^{k+1}(\Omega)^n) \\ p,p'\in L^2(0,T;\ Q\cap H^{k+1}(\Omega)). \end{cases} \qquad /4.2/$$

Припустимо також, що простори апроксимацій $Y_h = V_h + Q_h$ характеризуються властивістю /4.I/.

Тоді послідовність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна $\varphi_h = (u_h, p_h) \in L^2(0,T; V_h)$, яка однозначно визначається розв"язками задач /2.2/, збігається /відносно норми /I.3// при $h \to 0$ до розв"язку $\varphi = (u, p)$ задачі /I.I/ та при цьому для похибки апроксимації мають місце наступні оцінки швидкості збіжності

$$\|\Delta_h(t)\|^2 \le K h^{2k} \Big\{ h^2 \Big[\|u'(t)\|^2_{k+1,\Omega} + \int_0^t \|u''(t)\|^2_{k+1,\Omega}\, d\tau \Big] + $$

$$+ \|\varphi(t)\|^2_{k+1,\Omega} + \int_0^t \Big[\|u'(\tau)\|^2_{k+1,\Omega} + \|p(\tau)\|^2_{k+1,\Omega} \Big] d\tau \Big\} \quad \forall t \in [0,T] \qquad /4.3/$$

де $K = const > 0$ не залежить від h та φ.

Для доведення теореми зауважимо, що оператори Π_h та π_h здійснюють проектування лише відносно просторових змінних; тому для одержання оцінки /4.3/ достатньо скористатися властивостями цих операторів /3.2/, /3.3/ та нерівностями /4.I/, /3.6/.

5. Висновки та заключні зауваження. Нами розглянуто напівдискретизацію Гальоркіна варіаційної задачі електров"язкопружності /I.I/ за допомогою скінченноелементних апроксимацій, що характеризуються властивістю /4.I/. Отримані оцінки збіжності /4.2/ показують, як і слід було очікувати, що порядок збіжності дорівнює k, якщо на кожному скінченному елементі вживалися поліноми порядку $k+1$ для апроксимації як пружних зміщень, так і електричного потенціалу. Спосіб одержання оцінок такого типу, заснований на використанні належним чином вибраних операторів ортогонального проектування, використовувався раніше [див., напр., 2, 3, 6].

Ми обійшли увагою питання наближення криволінійних границь, конкретного вибору апроксимацій на скінченних елементах, обчислення коефіцієнтів задачі Коші /2.4/ і т.п. Основою вирішення цих питань для двовимірного випадку можуть служити результати праць [I, 7-9].

І нарешті, якщо розглядається задача про п"єзоприймач механічних коливань, то запропонована схема методу скінченних елементів мусить, взагалі кажучи, бути доповнена зручною процедурою врахування умови еквіпотенціальності на електроді Γ_j. Це можна здійснити за допомогою регуляризації такого класу задач, яка використовувалась у праці [4].

1. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А., В о в к В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов. 1981. 2. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элементов. М., 1977. 3. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 4. Т о к а р ь А.Ю., Ш и н к а р е н к о Г.А. Исследование краевых задач электроупругости для акустических преобразователей /Львов. ун-т. 1987. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2581-Ук87. 5. Ш и н к а р е н к о Г.А. Постановка та розв"язуваність початкових крайових задач електров"язкопружності // Вісн. Львів. ун-ту. 1990. Вип. 32. С.10-16. 6. Nedoma J. The finite element solution of elliptic and parabolic equations using simplicial isoparametric elements / RAIRO Anal. Num. 1979. Vol. 13. N2. P. 257-289. 7. Zlamal M. The finite element method in domains with curved bourdaries // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1973. Vol. 5. N3. P. 367-373. 8. Ženišek A. Finite element methods for coupled thermoelasticity and coupled consolidation of clay // RAIRO Anal. Numer. 1984. Vol. 18, N2. P. 183-205. 9. Ženišek A. How to avoid the use of Green's theorem in the Ciarlet-Raviart theory of variational crimes // M²AN: Math. Modell. Numer. Anal. 1987. Vol. 21, N1, P. 171-191.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.89

УДК 539.3:519.6

Г.А.Шинкаренко

АПРОКСИМАЦІЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОВ"ЯЗКОПРУЖНОСТІ.

II. ОДНОКРОКОВА СХЕМА ІНТЕГРУВАННЯ В ЧАСІ

На додаток до першої частини цієї праці тут для завершення процедури розв"язування задач теорії п"єзоефекту запропоновано однокрокову рекурентну схему інтегрування задачі Коші, що виникає внаслідок напівдискретизації Гальоркіна варіаційної задачі електров"язкопружності [2]. При побудові та енергетичному обгрунтуванні даної схеми ми йдемо вслід за працею [3], відзначаючи особливості, зумовлені зв"язністю фізико-механічних полів у п"єзоелектриках.

1. Постановка задачі. У першій частині цієї праці напівдискретна /за просторовими змінними/ апроксимація Гальоркіна для кожного фіксованого значення параметра дискретизації $h>0$ визначалась як розв"язок наступної задачі /див. задачу /2.2/ з [4], [2] та введені там позначення/: