1. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А., В о в к В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов. 1981. 2. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элементов. М., 1977. 3. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 4. Т о к а р ь А.Ю., Ш и н к а р е н к о Г.А. Исследование краевых задач электроупругости для акустических преобразователей /Львов. ун-т, 1987. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2581-Ук87. 5. Ш и н к а р е н к о Г.А. Постановка та розв"язуваність початкових крайових задач електров"язкопружності // Вісн. Львів. ун-ту. 1990. Вип. 32. С.10-16. 6. Nedoma J. The finite element solution of elliptic and parabolic equations using simplicial isoparametric elements / RAIRO Anal. Num.. 1979. Vol. 13, N2. P. 257-289. 7. Zlamal M. The finite element method in domains with curved boundaries // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1973. Vol. 5, N3. P. 367-373. 8. Ženišek A. Finite element methods for coupled thermoelasticity and coupled consolidation of clay // RAIRO Anal. Numer. 1984, Vol. 18, N2. P. 183-205. 9. Ženišek A. How to avoid the use of Green's theorem in the Ciarlet-Raviart theory of variational crimes // M²AN: Math. Modell. Numer. Anal. 1987. Vol. 21, N1, P. 171-191.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.89

УДК 539.3:519.6

Г.А.Шинкаренко

АПРОКСИМАЦІЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОВ"ЯЗКОПРУЖНОСТІ.

II. ОДНОКРОКОВА СХЕМА ІНТЕГРУВАННЯ В ЧАСІ

На додаток до першої частини цієї праці тут для завершення процедури розв"язування задач теорії п"єзоефекту запропоновано однокрокову рекурентну схему інтегрування задачі Коші, що виникає внаслідок напівдискретизації Гальоркіна варіаційної задачі електров"язкопружності [2]. При побудові та енергетичному обгрунтуванні даної схеми ми йдемо вслід за працею [3], відзначаючи особливості, зумовлені зв"язністю фізико-механічних полів у п"єзоелектриках.

1. Постановка задачі. У першій частині цієї праці напівдискретна /за просторовими змінними/ апроксимація Гальоркіна для кожного фіксованого значення параметра дискретизації $h > 0$ визначалась як розв"язок наступної задачі /див. задачу /2.2/ з [4], [2] та введені там позначення/:

$$\begin{cases} \text{задано } u_0 \in V,\ v_0 \in H,\ p_0 \in Q,\ \ (l,r) \in L^2(0,T;\, V' \times Q'); \\ \text{знайти пару } \varphi_h = (u_h, p_h) \in L^2(0,T;\, V_h \times Q_h) \quad \text{таку, що} \\ m(u_h''(t), v) + a(u_h'(t), v) + c(u_h(t), v) - e(v, p_h(t)) = \langle l(t), v \rangle \\ \qquad \mathfrak{z}(p_h'(t), q) + z(p_h(t), q) + e(u_h'(t), q) = \langle r(t), q \rangle \\ c(u_h(0) - u_0, v) = 0, \quad m(u_h'(0) - v_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V_h \\ \qquad \mathfrak{z}(p_h(0) - p_0, q) = 0 \qquad \forall q \in Q_h. \end{cases} \quad /I.1/$$

Якщо зафіксувати вибір базису в просторі апроксимацій $Y_h = V_h \times Q_h$, то задача /I.I/ стає еквівалентною задачі Коші, що має єдиний розв"язок [4]. Відзначимо, що для напівдискретної задачі /I.I/ залишається справедливим рівняння балансу енергії

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_h(t)|^2 + \|\varphi_h(t)\|^2 = \langle l(t), u_h'(t)\rangle + \langle r(t), p_h(t)\rangle \quad \forall t \in [0,T]. \qquad /I.2/$$

Тут внаслідок еліптичності форм $m(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$, $c(\cdot,\cdot)$ та $\mathfrak{z}(\cdot,\cdot)$ введемо норми /див. також [4]/

$$\begin{cases} \|u\|_H = m^{\frac{1}{2}}(u,u), \quad \|u\|_V = c^{\frac{1}{2}}(u,u), \quad \|p\|_Q = \mathfrak{z}^{\frac{1}{2}}(p,p) \\ |\varphi(t)|^2 = \|u'(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2 + \|p(t)\|_Q^2 \\ \|\varphi(t)\|^2 = a(u'(t), u'(t)) + z(p(t), p(t)) \quad \forall \varphi = (u,p) \in L^2(0,T;\, V \times Q). \end{cases} \quad /I.3/$$

2. <u>Дискретизація в часі</u>. Для натурального M приймемо $\Delta t = T/(M+1)$ та розглянемо розбиття відрізка [0, T] вузлами $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, M+1$. На кожному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ розв"язок $\varphi_h(t) = \{u_h(t), p_h(t)\} \in Y_h = V_h \times Q_h$ задачі /I.I/ будемо апроксимувати поліномами вигляду

$$\begin{cases} u_{h\Delta t}(t) = [1 - \xi^2(t)]\, u_h^j + \Delta t\, [1 - \xi(t)]\, \xi(t)\, v_h^j + \xi^2(t)\, u_h^{j+1} \\ p_{h\Delta t}(t) = [1 - \xi(t)]\, p_h^j + \xi(t)\, p_h^{j+1} \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \end{cases} \quad /2.1/$$

де $u_h^k, v_h^k \in V_h$ та $p_h^k \in Q_h$ невідомі, а $\xi(t) = (t - t_j)/\Delta t$. Подібним чином будемо апроксимувати і функціонали правих частин /I.I/:

$$\begin{cases} l_{\Delta t}(t) = [1 - \xi(t)]\, l_j + \xi(t)\, l_{j+1}, \quad l_k = l(t_k) \\ r_{\Delta t}(t) = [1 - \xi(t)]\, r_j + \xi(t)\, r_{j+1}, \quad r_k = r(t_k) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \end{cases} \quad /2.2/$$

Використовуючи процедуру зважених залишків /див. п.3 з [3], побудуємо наступну рекурентну схему розв"язування задачі /I.I/ /всюди нижче індекс h пропущено для спрощення запису/:

$$
\begin{cases}
\text{задано } \Delta t, \beta, \gamma = const > 0, \quad \varphi^j = (u^j, v^j, p^j) \in V^2 \times Q; \\
\text{знайти трійку } \varphi^{j+1} = (u^{j+1}, v^{j+1}, p^{j+1}) \in V^2 \times Q, \quad \text{таку, що} \\
m(\dot v^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(v^{j+\gamma}, v) + c(u^{j+\gamma} + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta-\gamma)\dot v^{j+\frac{1}{2}}, v) - \\
\qquad - e(v, p^{j+\gamma}) = \langle l_{j+\gamma}, v\rangle \quad \forall v \in V \qquad /2.3/ \\
\ni(\dot p^{j+\frac{1}{2}}, q) + z(p^{j+\gamma}, q) + e(v^{j+\gamma}, q) = \langle r_{j+\gamma}, q\rangle \quad \forall q \in Q \\
\qquad v^{j+1} = 2\dot u^{j+\frac{1}{2}} - v^j, \qquad j = 0, \ldots, M,
\end{cases}
$$

де

$$
f^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f^{j+1} + f^j), \quad \dot f^{j+\frac{1}{2}} = (f^{j+1} - f^j)\Delta t, \quad f^{j+\gamma} = f^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t(\gamma - \tfrac{1}{2})\dot f^{j+\frac{1}{2}}
$$

$$
\langle l_{j+\gamma}, v\rangle = (1-\gamma)\langle l_j, v\rangle + \gamma\langle l_{j+1}, v\rangle \quad \text{і т.п.}
$$

Відзначимо, що підстановка /2.I/ в початкові умови задачі /I.I/ приводить до рівнянь

$$
\begin{cases}
c(u^0 - u_0, v) = 0, \quad m(v^0 - v_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V. \\
\qquad\qquad \ni(p^0 - p_0, q) = 0 \quad . \ \forall q \in Q \qquad /2.4/
\end{cases}
$$

для визначення трійки $\varphi^0 = (u^0, v^0, p^0)$ необхідної для запуску рекурентної схеми /2.3/.

З обчислювальної точки зору заслуговує на увагу таке зображення схеми /2.3/:

$$
\begin{cases}
\text{задано } \Delta t, \beta, \gamma > 0, \quad \varphi^j = (u^j, v^j, p^j) \in V^2 \times Q; \\
\text{знайти трійку } \varphi^{j+1} = (u^{j+1}, v^{j+1}, p^{j+1}) \in V^2 \times Q \quad \text{таку, що} \\
m(v^{j+\gamma}, v) + \Delta t\gamma\{a(v^{j+\gamma}, v) - e(v, p^{j+\gamma})\} + \frac{1}{2}\Delta t^2 c(v^{j+\gamma}, v) = \\
= m(v^j, v) + \Delta t\gamma\{\langle l_{j+\gamma}, v\rangle - c(u^j, v)\} - \frac{1}{2}\Delta t^2(2\gamma^2 - \beta)c(v^j, v) \qquad /2.5/ \\
\ni(p^{j+\gamma}, q) + \Delta t\gamma\{z(p^{j+\gamma}, q) + e(v^{j+\gamma}, q)\} = \\
= \ni(p^j, q) + \Delta t\gamma\langle r_{j+\gamma}, q\rangle \qquad \forall (v, q) \in V \times Q \\
v^{j+1} = v^j + (v^{j+\gamma} - v^j)/\gamma, \quad p^{j+1} = p^j + (p^{j+\gamma} - p^j)/\gamma \\
u^{j+1} = u^j + \frac{1}{2}\Delta t(v^{j+1} + v^j), \quad j = 0, \ldots, M.
\end{cases}
$$

Застосування теореми Лакса-Мільграма показує, що для кожного j перші два рівняння задачі /2.5/ дають змогу однозначно обчислити пару / $v^{j+\gamma}$, $p^{j+\gamma}$ / та, відповідно, трійку φ^{j+1}.

<u>Зауваження 2.I.</u> Побудована тут рекурентна схема дозволяє, по-перше, за необхідністю проводити обчислення зі змінним кроком інтегрування Δt та, по-друге, точно задовольнити початкові

умови задачі /I.I/, тобто не вносить у них збурень за рахунок прийнятої нами апроксимації за часом.

Зауваження 2.2. Оскільки параметр схеми β входить лише в перше з рівнянь /2.3/, то згідно з висновками [3] доцільно без втрати стійкості та точності обчислень прийняти

$$\beta = \gamma. \qquad /2.6/$$

Зауваження 2.3. Запис рекурентної схеми у вигляді /2.5/ показує, що дискретизована в часі задача електропружності належить до класичних змішаних варіаційних задач.

3. Регуляризована рекурентна схема. На відміну від дискретизації Гальоркіна за просторовими змінними внаслідок зв"язності розглядуваних фізико-механічних полів дискретизація в часі приводить, взагалі кажучи, до порушення балансу енергії на кожному кроці за часом, тобто рекурентна схема /2.3/, /2.4/ може бути при певному виборі параметрів неконсервативною. Позбутися цього недоліку можна різними способами. Ми зупинимося на наступному варіанті регуляризації задачі /2.3/:

$$\begin{cases} \text{задано } \Delta t, \gamma = const > 0, \ \varphi^j = (u^j, v^j, p^j) \in V^2 \times Q; \\ \text{знайти трійку } \varphi^{j+1} = (u^{j+1}, v^{j+1}, p^{j+1}) \in V^2 \times Q \qquad \text{таку, що} \\ m(\dot v^{j+\frac12}, v) + a(v^{j+\gamma}, v) + c(u^{j+\gamma}, v) - \\ \qquad - e(v, p^{j+\frac12}) = \langle l_{j+\frac12}, v \rangle \quad \forall v \in V \qquad /3.I/ \\ \text{э}(\dot p^{j+\frac12}, q) + z(p^{j+\gamma}, q) + e(v^{j+\frac12}, q) = \langle r_{j+\frac12}, q \rangle \quad \forall q \in Q \\ v^{j+1} = 2\dot u^{j+\frac12} - v^j, \quad j = 0, \dots, M. \end{cases}$$

Підставивши в наведені рівняння $v = v^{j+\frac12}$, $q = p^{j+\frac12}$, після нескладних обчислень знайдемо енергетичне рівняння вигляду

$$\frac{1}{2\Delta t}\left\{|\varphi^{j+1}|^2 - |\varphi^j|^2\right\} + \|\varphi^{j+\frac12}\|^2 +$$
$$+ \frac12\left(\gamma - \frac12\right)\left\{\|\varphi^{j+1}\|^2 - \|\varphi^j\|^2\right\} + \Delta t\left(\gamma - \frac12\right)\|v^{j+\frac12}\|_V^2 = \qquad /3.2/$$
$$= \langle l_{j+\frac12}, v^{j+\frac12} \rangle + \langle r_{j+\frac12}, p^{j+\frac12} \rangle, \ j = 0, \dots, M,$$

яке при виборі γ = I/2 стає різницевим аналогом рівняння /I.3/. Відзначимо тут, що другий рядок рівняння /3.2/ допускає фізично виправдану інтерпретацію лише при виконанні умови

$$\gamma \geq \frac12 . \qquad /3.3/$$

Більше того, на основі нерівностей вигляду

$$|\langle \ell, v\rangle| \le K\,\|\ell\|^2_{V'} + \frac{1}{2}\|v\|^2_A\ , \quad \|v\|_A = a^{\frac{1}{2}}(v,v),$$

/тут і нижче одним символом K ми позначаємо додатні константи, значення яких не залежать від величин, що нас цікавлять/ рівняння /3.2/ приводить до апріорної оцінки

$$|\varphi^{(j+1)}|^2 + \Delta t \sum_{m=0}^{j} \|\varphi^{m+\frac{1}{2}}\|^2 +$$

$$+ \Delta t\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left\{\|\varphi^{j+1}\|^2 + 2\Delta t \sum_{m=0}^{j} \|v^{m+\frac{1}{2}}\|^2_V\right\} \le$$

$$\le |\varphi_0|^2 + \Delta t\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\|\varphi_0\|^2 + 2\Delta t \sum_{m=0}^{j}\left\{\|\ell_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{V'} + |r_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{Q'}\right\} \quad j=0,\ldots,M. \qquad /3.4/$$

Звідси не важко побачити, що нерівність /3.3/ виступає достатнім критерієм безумовної /відносно вибору кроку інтегрування Δt / стійкості однокрокової рекурентної схеми /3.I/, /2.4/.

Зауваження 3.I. Нерівність /3.4/ дає змогу без затруднень виділити також клас умовно стійких однокрокових схем /3.I/, /2.4/.

4. Апріорні оцінки швидкості збіжності. Внаслідок лінійності розглядуваних задач похибки дискретизації за часом

$$\delta^j = u^j - u(t_j),\quad \varepsilon^j = v^j - u'(t_j),\quad \rho^j = p^j - p(t_j)$$

задовольняють рівняння

$$\begin{cases} m(\dot\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(\varepsilon^{j+\gamma}, v) + c(\delta^{j+\gamma}, v) - e(v, \rho^{j+\frac{1}{2}}) = \langle F_j, v\rangle \\ э(\dot\rho^{j+\frac{1}{2}}, q) + z(\rho^{j+\gamma}, q) - e(\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}, q) = \langle s_j, q\rangle \\ \varepsilon^{j+\frac{1}{2}} - \dot\delta^{j+\frac{1}{2}} = \mu_j; \quad j=0,\ldots,M, \quad \forall (v,q)\in V\times Q, \end{cases} \qquad /4.I/$$

де

$$\begin{cases} \langle F_j, v\rangle = \langle \ell_{j+\frac{1}{2}}, v\rangle - m(\dot v_{j+\frac{1}{2}}, v) - a(v_{j+\gamma}, v) - c(u_{j+\gamma}, v) + e(v, p_{j+\frac{1}{2}}) \\ \langle s_j, q\rangle = \langle r_{j+\frac{1}{2}}, q\rangle - э(\dot p_{j+\frac{1}{2}}, q) - z(p_{j+\gamma}, q) - e(v_{j+\frac{1}{2}}, q) \\ \mu_j = v_{j+\frac{1}{2}} - \dot u_{j+\frac{1}{2}}\ , \end{cases} \qquad /4.2/$$

та

$$u_k = u(t_k),\ v_k = u'(t_k),\ p_k = p(t_k),\quad u_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{k+1} + u_k)$$

$$\dot u_{j+\frac{1}{2}} = (u_{k+1} - u_k)/\Delta t;\quad u_{k+j} = u_{k+\frac{1}{2}} + \Delta t\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\dot u_{k+\frac{1}{2}} \text{ і т.п.} \qquad /4.3/$$

Далі відносно розв"язку задачі /1.1/ будемо припускати, що

$$(u, p) \in C^{''}(0,T;V) \times C^3(0,T;Q), \qquad /4.4/$$

і підставимо в праві частини /4.2/ його розклади в ряди Тейлора в околі точки $t = t_{j+\frac{1}{2}}$. Тоді після використання рівнянь задаці /1.1/ знайдемо, що

$$\begin{cases} \langle F_j, v\rangle = -\Delta t(\gamma-\frac{1}{2})m(u''(t_{j+\frac{1}{2}}),v)+\Delta t^2\langle L_j,v\rangle, & L_j\in V' \\ \langle S_j, q\rangle = -\Delta t(\gamma-\frac{1}{2})\colon(p'(t_{j+\frac{1}{2}}),q)+\Delta t^2\langle R_j,q\rangle, & R_j\in Q' \\ \mu_j = K_j\Delta t^2, & K_j = const. \end{cases} \qquad /4.5/$$

Знову ж таки підстановка останніх виразів в рівняння /4.1/ з $v=\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}$, $q=\rho^{j+\frac{1}{2}}$ дає змогу подібно до п. 3 обчислити енергетичні оцінки похибок $\Delta^{j+1}=(\delta^{j+1},\varepsilon^{j+1},\rho^{j+1})\in V^2\times Q$ вигляду

$$|\Delta^{j+1}|^2+\Delta t\sum_{m=0}^{j}\|\Delta^{m+\frac{1}{2}}\|+$$
$$+\Delta t(\gamma-\tfrac{1}{2})\{\|\Delta^{j+1}\|^2+2\Delta t\sum_{m=0}^{j}\|\varepsilon^{m+\frac{1}{2}}\|_V^2\}\le$$
$$\le KT\Delta t^2\{(\gamma-\tfrac{1}{2})^2[\|u'''\|^2_{L^\infty(0,T,H)}+\|p\|^2_{C(0,T,Q)}]+ \qquad /4.6/$$
$$+\Delta t^2\sum_{m=0}^{j}[\|L_m\|^2_{V'}+\|R_m\|^2_{Q'}]\},\quad j=0,\dots,M.$$

Таким чином, нами доведена

<u>Теорема 4.1</u> /про збіжність однокрокової рекурентної схеми/.

Нехай $\varphi_h=(u_h,p_h)$ - розв"язок задачі /1.1/, причому

$$(u_h,p_h)\in C^4(0,T;V_h)\times C^3(0,T;Q_h),\quad 0<T<+\infty. \qquad /4.7/$$

Допустимо також, що послідовності $\varphi_h^{j+1}=(u_h^{j+1},v_h^{j+1},p_h^{j+1})\in V_h^2\times Q_h$ будуються для відшукання наближеного розв"язку задачі /1.1/ за допомогою рекурентної схеми /3.1/, /2.4/, $j=0,\dots,M$, $\Delta t(M+1)=T$.

Тоді при виконанні умови стійкості /3.2/ значення φ_h^{j+1} збігаються при $\Delta t\to 0$ відносно енергетичної норми до значень точного розв"язку $\varphi_h(t_{j+1})=(u_h(t_{j+1}),u_h'(t_{j+1}),p_h(t_{j+1}))$ і при цьому для похибок апроксимації

$$\Delta_h^{j+1}=(u_h^{j+1}-u_h(t_{j+1}),\ v_h^{j+1}-u_h'(t_{j+1}),\ p_h^{j+1}-p_h(t_{j+1}))$$

мають місце апріорні оцінки швидкості збіжності /4.6/ з $K=const>0$, що не залежить від вибору $\Delta t, h, \gamma$ та φ_h. Більше того, максимальний порядок збіжності схеми /рівний двом/ досягається при виборі

$$\gamma=\frac{1}{2}+K\Delta t,\quad K=const>0. \qquad /4.7/$$

5. <u>Висновки та заключні зауваження.</u> Нами запропоновано варіаційний підхід до розв"язування початково-крайових задач для п"єзоелектриків з короткочасною пам"яттю та ненульовим струмом провідності. Цей підхід базується на принципі віртуальних робіт /у термінах пружних зміщень та електричного потенціалу/ та послідовному використанні закону збереження енергії як для встановлення коректності вихідної варіаційної задачі, так і для побудови оптимальних за порядками апріорних оцінок збіжності апроксимацій Гальоркіна та однокрокової рекурентної схеми.

Відзначимо, що розглянута нами регуляризація однокрокової схеми дала змогу дослідити її властивості в межах енергетичного підходу і, з іншого боку, ліквідувати дисбаланс енергії, що вноситься проекційним рівнянням зважених залишків у задачах теорії зв"язних фізико-механічних полів.

Зауважимо також, що за відсутності струму провідності в п"єзоелектрику не вдається встановити стійкість та збіжність схеми /2.3/, /2.4/ відносно енергетичної норми. В той же час регуляризована схема

$$\begin{cases} \text{задано } \varepsilon, \Delta t, \gamma = const > 0, \ \varphi^j = (u^j, v^j, p^j) \in V_h^2 \times Q_h; \\ \text{знайти трійку } \varphi^{j+1} = (u^{j+1}, v^{j+1}, p^{j+1}) \in V_h^2 \times Q_h \quad \text{таку, що} \\ m(\dot v^{j+\frac12}, v) + a(v^{j+\gamma}, v) + c(u^{j+\gamma}, v) - e(v, p^{j+\frac12}) = \langle \ell_{j+\gamma}, v \rangle \\ \ni(\dot p^{j+\frac12}, q) + \varepsilon \ni(p^{j+\gamma}, q) + e(v^{j+\frac12}, q) = \langle \varsigma_{j+\gamma}, q \rangle . \\ v^{j+1} = 2\dot u^{j+\frac12} - v^j, \quad j = 0, \dots, M, \quad \forall (v, q) \in V_h \times Q_h \end{cases} \qquad /5.I/$$

/доданок $\varepsilon \ni (p^{j+\gamma}, q)$ компенсує відсутність доданку $z(p^{j+\gamma}, q)$ /. порівн. з /2.3// дає змогу зробити подібні до попередніх висновки, якщо параметр регуляризації ε вибраний так, що $\varepsilon = K\Delta t^2$.

Запропонований тут варіаційний підхід може служити основою для розробки чисельних методів та дослідження інших математичних моделей теорії п"єзоефекту / див., наприклад, / I, гл.6 //.

I. Короткина М.Р. Электромагнитоупругость. М., 1988. 2. Шинкаренко Г.А. Постановка та розв"язуваність початково-крайових задач електров"язкопружності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 32. С.10-16. 3. Шинкаренко Г.А. Про одну модифікацію схеми Ньюмарка // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.31. С.46-52. 4. Шинк а р е н к о Г.А. Апроксимація варіаційних задач електров"язкопружності. І. Напівдискретизація Гальоркіна // У цьому ж Віснику. С.58-61.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.89

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ НА ОСНОВІ ФУНКЦІЙ ГРІНА І МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В основі розрахунку ряду електроннопроменевих приладів лежить задача знаходження електростатичного поля, створеного сукупністю заряджених електродів. При побудові відповідної математичної моделі доцільно представляти такі електроди у вигляді розімкнутих поверхонь, на яких задаються граничні значення потенціалу. В даний час широкого застосування набув метод інтегральних рівнянь, який дає змогу крайову задачу в суттєво просторовій постановці звести до знаходження деяких характеристик поля, розподілених по поверхнях електродів. Досвід проектування конкретних приладів показав необхідність моделювання окремих електродів у вигляді необмежених поверхонь. Зрозуміло, що в цьому випадку традиційне використання методу інтегральних рівнянь стає малоефективним. У роботі при побудові математичної моделі використовуються функції Гріна. Це дає змогу звести поставлену задачу до інтегрального рівняння першого роду з ядром у вигляді функції Гріна, причому інтегрування здійснюється по обмежених поверхнях. Функції Гріна в поєднанні з методом інтегральних рівнянь враховують ситуацію, коли одна із граничних поверхонь належить до класу так званих канонічних обмежених у просторі поверхонь. На прикладі розв"язання конкретної задачі ілюструється ефективність, з точки зору використання ресурсів ЕОМ, вказаного варіанту методу інтегральних рівнянь.

Нехай Ω – частина простору E^3, розміщена по один бік гладкої необмеженої поверхні S_0. Позначимо через M, N, P і т.д. точки в E^3, а через $d(P,M)$ – відстань між P і M. Припус-