к а р е н к о Г.А. Апроксимація варіаційних задач електров"язкопружності. І. Напівдискретизація Гальоркіна // У цьому ж Віснику. С.58-61.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.89

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ НА ОСНОВІ ФУНКЦІЙ ГРІНА І МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В основі розрахунку ряду електроннопроменевих приладів лежить задача знаходження електростатичного поля, створеного сукупністю заряджених електродів. При побудові відповідної математичної моделі доцільно представляти такі електроди у вигляді розімкнутих поверхонь, на яких задаються граничні значення потенціалу. В даний час широкого застосування набув метод інтегральних рівнянь, який дає змогу крайову задачу в суттєво просторовій постановці звести до знаходження деяких характеристик поля, розподілених по поверхнях електродів. Досвід проектування конкретних приладів показав необхідність моделювання окремих електродів у вигляді необмежених поверхонь. Зрозуміло, що в цьому випадку традиційне використання методу інтегральних рівнянь стає малоефективним. У роботі при побудові математичної моделі використовуються функції Гріна. Це дає змогу звести поставлену задачу до інтегрального рівняння першого роду з ядром у вигляді функції Гріна, причому інтегрування здійснюється по обмежених поверхнях. Функції Гріна в поєднанні з методом інтегральних рівнянь враховують ситуацію, коли одна із граничних поверхонь належить до класу так званих канонічних обмежених у просторі поверхонь. На прикладі розв"язання конкретної задачі ілюструється ефективність, з точки зору використання ресурсів ЕОМ, вказаного варіанту методу інтегральних рівнянь.

Нехай Ω - частина простору E^3, розміщена по один бік гладкої необмеженої поверхні S_0. Позначимо через M, N, P і т.д. точки в E^3, а через $d(P,M)$ - відстань між P і M. Припустимо, що в необмеженій області Ω міститься сукупність гладких розімкнутих поверхонь $S=\bigcup_{i=1}^{m} S_i$, які не мають спільних точок. Нехай $\bar{S}_i = S_i \cup \Gamma_i$, де Γ_i – кусково-гладкий контур скінченної довжини, що обмежує S_i, а $\bar{S}=\bigcup_{i=1}^{m}\bar{S}_i$.

Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного нерухомими в просторі і незмінними в часі зарядами, розподі енними по поверхнях $S_i\,(i=1,2,\ldots,m)$. Необхідно знайти потенціал $U(P)$ в просторі $\Omega\setminus\bar{S}$, якщо на поверхнях виконуються граничні умови п..шого роду. З математичної точки зору потрібно визначити функцію $U(P)$ з класу $C^2(\Omega\setminus\bar{S})$, яка задовольняє тривимірне рівняння Лапласа

$$\Delta U(P)=0\,,\quad P\in\Omega\setminus\bar{S}\,; \qquad /1/$$

граничні умови Діріхле

$$U^-(P)=\gamma_0(P)\,,\quad P\in S_0\,; \qquad /2/$$

$$U^{\pm}(P)=\gamma_{\pm}(P)\,,\quad P\in S\,; \qquad /3/$$

умову на безмежності

$$\lim_{P\to\infty} U(P)=0\,,\quad P\in\Omega, \qquad /4/$$

а також умову на контурі розімкнутої поверхні

$$\lim_{\rho\to 0}\sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{C_i(\rho)}\left|\frac{\partial U(P)}{\partial\rho}\right| dS_P=0, \qquad /5/$$

де $C_i(\rho)$ – циліндрична поверхня радіуса ρ, охоплююча Γ_i $(i=1,2,\ldots,m)$, $\gamma_{\pm}(P)\in C^{1,\alpha}(S)$, $\gamma_0(P)\in C^{1,\alpha}(S_0)$.

Розв"язок задачі /1/–/5/ будемо шукати у вигляді $U_1(P)+U_2(P)$, де $U_1(P)$ і $U_2(P)$ – розв"язки відповідних граничних задач:

$$\Delta U_1(P)=0,\qquad P\in\Omega\,; \qquad /6/$$

$$U_1^-(P)=\gamma_0(P),\qquad P\in S_0\,; \qquad /7/$$

$$\lim_{P\to\infty} U_1(P)=0\,,\qquad P\in\Omega\,; \qquad /8/$$

$$\Delta U_2(P)=0\,,\qquad P\in\Omega\setminus\bar{S}\,; \qquad /9/$$

$$U_2^-(P)=0\,,\qquad P\in S_0\,; \qquad /10/$$

$$U_2^{\pm}(P) = \gamma_{\pm}(P) - U_1(P) = d_{\pm}(P), \quad P \in S; \qquad /11/$$

$$\lim_{P \to \infty} U_2(P) = 0, \qquad P \in \Omega; \qquad /12/$$

$$\lim_{\rho \to 0} \sum_{i=1}^{m} \iint_{C_i(\rho)} \left| \frac{\partial U_2(P)}{\partial \rho} \right| dS_P = 0. \qquad /13/$$

Зауважимо, що $f^{\pm}(M)$ – граничне значення функції $f(P)$, коли точка P прямує до точки M на граничній поверхні відповідно з додатного чи від"ємного боку. В частковому випадку поверхня S_0 може належати до класу так званих канонічних обмежених у просторі поверхонь.

Відомо, що розв"язок задачі /6/-/8/ представляється у вигляді [4]

$$U_1(P) = -\iint_{S_0} \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_M} \gamma_0(M)\, dS_M, \qquad /14/$$

де $G(P,M)$ – функція Гріна оператора Лапласа для області Ω. Таким чином, визначення функції $U(P)$ зводиться до розв"язування задачі /9/-/13/. Справедлива наступна теорема [3].

<u>Теорема.</u> Якщо розв"язок $U_2(P)$ задачі /9/-/13/ існує, то він з необхідністю представляється у вигляді

$$U_2(P) = \iint_S G(P,M)\, \tau(M)\, dS_M - U_0(P), \quad P \in \Omega \setminus \bar{S}, \quad /15/$$

де

$$U_0(P) = \iint_S \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_M} \left\{ d_-(M) - d_+(M) \right\} dS_M,$$

а $\tau(M)$ – розв"язок інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\iint_S G(P,M)\, \tau(M)\, dS_M = g(P), \quad P \in S, \qquad /16/$$

$$g(P) = \frac{1}{2} \left\{ d_-(P) + d_+(P) \right\} + U_0(P).$$

І навпаки, якщо функція $U_2(P)$ задана виразом /15/, де $\tau(M)$ задовольняє рівняння /16/, то вона є розв"язком задачі /9/-/13/.

Покажемо, що дає на практиці використання функцій Гріна в поєднанні з методом інтегральних рівнянь. З цією метою розв"яжемо конкретну задачу.

Розглянемо в просторі E^3 сферу S_0 радіуса $R = 1$ з центром у початку координат і чотирикутну пластину S, яка визначається координатами своїх вершин $A_i=(X_i, Y_i, Z_i)$ $(i=1,2,3,4)$. Припустимо, що потенціал на сфері S_0 і пластині S створюється одиничним зарядом, зосередженим у деякій точці $N=(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Тоді $\gamma_0(P)=1/d(P,N)$, $P\in S_0$, а $\gamma_+(P)=\gamma_-(P)=1/d(P,N)$, $P\in S$. Функція Гріна оператора Лапласа для зовнішньої до сфери області має вигляд /1/

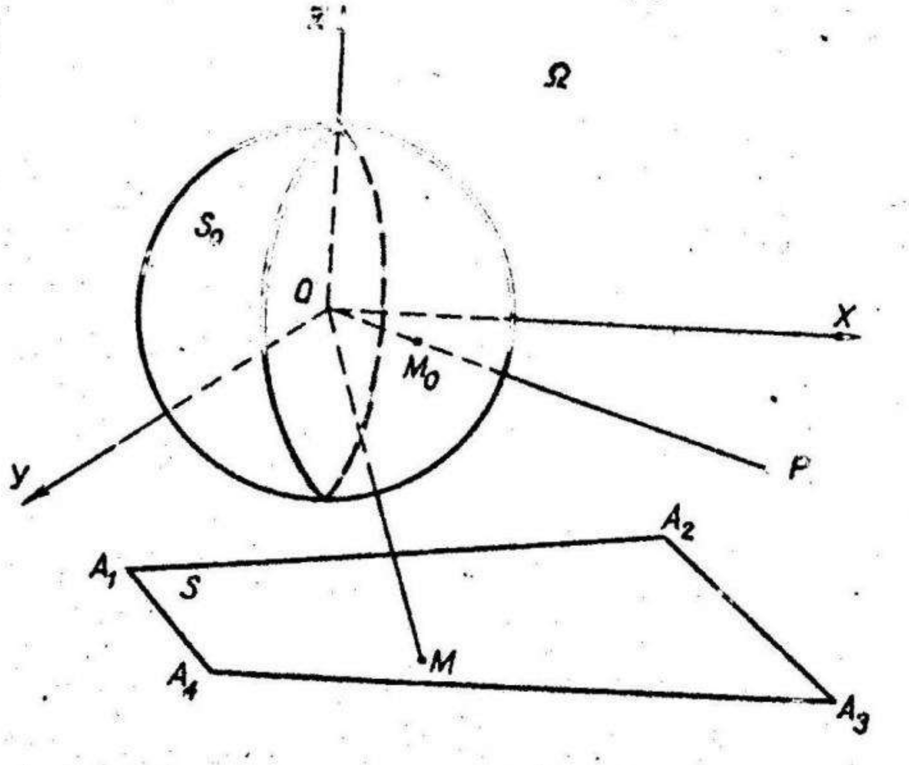
$$G(P,M)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{R}{\rho_1}\cdot\frac{1}{r_0}\right),$$

де $r_1=d(P,M)$; $\rho_1=d(P,O)$; $r_0=d(M_0,M)$; $M\in S$; $P=(\rho_1,\varphi_1,\theta_1)\in\Omega\setminus\bar{S}$ – контрольна точка, в якій шукаємо невідоме значення потенціалу; M_0 – точка спряжена до P відносно сфери S_0, O – початок координат. Згідно з /14/ розв"язок задачі /6/–/8/ дається інтегралом Пуассона

$$U_1(\rho_1,\varphi_1,\theta_1)=\frac{R(\rho_1^2-R^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\gamma_0(\varphi,\theta)\frac{\sin\theta\, d\theta}{(R^2-2R\rho_1\cos\Gamma+\rho_1^2)^{3/2}},$$

де

$$\cos\Gamma=\cos\theta\cdot\cos\theta_1+\sin\theta\cdot\sin\theta_1\cdot\cos(\varphi-\varphi_1).$$



Розв"язок задачі /9/-/13/ шукаємо у вигляді /див. рисунок/:

$$U_2(P)=\iint\limits_S G(P,M)\tau(M)\,dS_M,$$

причому $P=(x_1,y_1,z_1),\ M=(x,y,z),\quad M_0=\left(\frac{R^2}{\rho_1^2}x_1,\ \frac{R^2}{\rho_1^2}y_1,\ \frac{R^2}{\rho_1^2}z_1\right).$

Невідома функція $\tau(M)$ визначається з інтегрального рівняння Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі

$$\iint\limits_S G(P,M)\tau(M)\,dS_M=1/d(P,N)-U_1(P)=Q(P),\quad P\in S. \qquad /17/$$

Розглянемо параметричне представлення пластини

$$x(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\bar{x}_i\cdot\varphi_i(\alpha,\beta),$$

$$y(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\bar{y}_i\cdot\varphi_i(\alpha,\beta),$$

$$z(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\bar{z}_i\cdot\varphi_i(\alpha,\beta),$$

де

$$\varphi_1(\alpha,\beta)=(1-\alpha)(1-\beta),\qquad \varphi_2(\alpha,\beta)=(1+\alpha)(1-\beta),$$
$$\varphi_3(\alpha,\beta)=(1+\alpha)(1+\beta),\qquad \varphi_4(\alpha,\beta)=(1-\alpha)(1+\beta).$$

Тоді інтегральне рівняння /17/ запишеться у вигляді

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\alpha\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{R}{\rho_1}\cdot\frac{1}{r_0}\right]I(\alpha,\beta)\tau^*(\alpha,\beta)\,d\beta=Q^*(\bar{\alpha},\bar{\beta}), \qquad /18/$$

де $-1\leqslant\bar{\alpha},\bar{\beta}\leqslant 1$, $I(\alpha,\beta)=\left[E(\alpha,\beta)\cdot G(\alpha,\beta)-F^2(\alpha,\beta)\right]^{1/2}$,

причому E, G і F – коефіцієнти першої квадратичної форми

$$E(\alpha,\beta)=(x'_\alpha)^2+(y'_\alpha)^2+(z'_\alpha)^2,$$
$$G(\alpha,\beta)=(x'_\beta)^2+(y'_\beta)^2+(z'_\beta)^2,$$
$$F(\alpha,\beta)=x'_\alpha\cdot x'_\beta+y'_\alpha\cdot y'_\beta+z'_\alpha\cdot z'_\beta.$$

Слід також зауважити, що

$$P=\left(x(\bar{\alpha},\bar{\beta}),y(\bar{\alpha},\bar{\beta}),z(\bar{\alpha},\bar{\beta})\right),\quad M=\left(x(\alpha,\beta),y(\alpha,\beta),z(\alpha,\beta)\right).$$

$$M_0=\left(\frac{R^2}{\rho_1^2}x(\bar{\alpha},\bar{\beta}),\ \frac{R^2}{\rho_1^2}y(\bar{\alpha},\beta),\ \frac{R^2}{\rho_1^2}z(\bar{\alpha},\beta)\right).$$

При наближеному розв"язуванні інтегрального рівняння /18/ виникає проблема обчислення таких невласних інтегралів

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[E(\bar{\alpha},\bar{\beta})(\alpha-\bar{\alpha})^2+2F(\bar{\alpha},\bar{\beta})(\alpha-\bar{\alpha})(\beta-\bar{\beta})+G(\bar{\alpha},\bar{\beta})(\beta-\bar{\beta})^2\right]^{-1/2}d\alpha\,d\beta, \qquad /19/$$

де $-1\leqslant\bar{\alpha},\bar{\beta}\leqslant 1$.

При цьому для застосування відомої методики [1] необхідне виконання умов

$$\begin{cases} E(\bar{\alpha},\bar{\beta})\cdot G(\bar{\alpha},\bar{\beta}) - F^2(\bar{\alpha},\bar{\beta}) > 0, \\ E(\bar{\alpha},\bar{\beta}) + G(\bar{\alpha},\beta) > 0. \end{cases} \qquad /20/$$

Доведено, що умови /20/ виконуються, якщо пластина S не вироджується у пряму і $\bar{\alpha},\ \bar{\beta} \neq \pm 1$.

Використовуючи метод саморегуляризації [2] та апріорну інформацію про поведінку шуканої функції на границі квадрату $D=[-1,1]\times[-1,1]$, зведемо /18/ до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Для розв"язання останнього скористаємось білінійною апроксимацією шуканої функції, вибираючи в області D точки колокації на кожному скінченному елементі з урахуванням відступу від границі D.

Описана задача досліджувалася при таких значеннях параметрів: $A_1=(-1,-1,-2)$, $A_2=(1,-1,-2)$, $A_3=(1,1,-2)$, $A_4=(-1,1,-2)$, $N=(0,0,0)$, $P=(0,0,-4)$. При використанні 16 точок колокації, відступі від границі квадрату D на величину 0,3 та достатньо високій точності обчислення інтегралів був отриманий результат

$$U(P) = 0{,}25000,$$

який збігається з теоретичним

$$U_T(P) = 1/d(P,N) = 1/4.$$

Цей факт підтверджує високу ефективність розробленої методики при розв"язанні певного класу задач.

1. Гарасим Я.С., Остудін Б.А. Дослідження алгоритму обчислення одного класу двовимірних невласних інтегралів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 33. С.40-45. 2. Людкевич И.В., Остудин Б.А. Численное решение граничных задач теории потенциала в электронной оптике методом саморегуляризации. Львов, 1983. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 1155Ук. 3. Сибиль Ю.Н., Остудин Б.А., Кичура С.М. Исследование одной математической модели, описывающей пространственное электростатическое поле // Теоретическая электротехника. 1990. Вып. 49. С.132-139. 4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 06.06.90