УДК 517.944.947

Мартиненко Марія Д., Басьюні Халіль

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій області $D\subset R^2$ і задовольняє за змінною y умову Ліпшиця із сталою L. Тоді у досить малому околі внутрішньої точки $(x_0,y_0)\in D$ буде існувати єдиний розв"язок задачі Коші

$$y'=f(x,y); \qquad /1/$$

$$y(x_0)=y_0\neq 0. \qquad /2/$$

Поряд з /1/-/2/ розглянемо в D таку задачу Коші:

$$\tilde{y}'=K(x)\tilde{y}, \qquad K(x)=\frac{f(x,y_0)}{y_0}; \qquad /3/$$

$$\tilde{y}(x_0)=y_0. \qquad /4/$$

Якщо стала $h<\frac{1}{L}$, то звичайними міркуваннями можна вивести нерівність

$$\max_{|x-x_0|\leq h}|y(x)-\tilde{y}(x)|\leq\frac{h\left[L+\frac{A}{|y_0|}\right]}{1-hL}\max_{|x-x_0|\leq h}|\tilde{y}(x)-y_0|, \qquad /5/$$

де

$$A=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|.$$

Нехай $\tilde{\tilde{y}}(x)$ є розв"язок задачі

$$\tilde{\tilde{y}}'=K_0\tilde{\tilde{y}}$$

$$\tilde{\tilde{y}}(x_0)=y_0.$$

Тоді на проміжку $|x-x_0|\leq h$, де $h<\frac{1}{L}$, має місце нерівність

$$\max_{|x-x_0|\le h} |y(x)-\tilde{\tilde{y}}(x)| \le \frac{h}{1-hL}\Big\{|f(x_0,y_0)| +$$

$$+\max_{|x-x_0|\le h}|f(x,y_0)| + \left|\frac{f(x_0,y_0)}{y_0}\right| \cdot \max_{|x-x_0|\le h}|\tilde{\tilde{y}}(x)-y_0|\Big\}. \qquad /6/$$

Все вищесказане може бути безпосередньо використане для розв"язування такої задачі Коші:

$$y' + a(x)y = f(x,y) + b(x); \qquad /7/$$

$$y(x_0) = y_0 \neq 0, \qquad /8/$$

де $a(x)$, $b(x)$ – неперервні, а $f(x,y)$ задовольняє в D вищенаведені умови.

Лінеаризацію задачі /7/-/8/ легко здійснити на основі рівняння

$$\tilde{y}' + a(x)\tilde{y} = k\tilde{y} + \varphi(x); \qquad /9/$$

$$\tilde{y}(x_0) = y_0, \qquad /10/$$

де $k = \dfrac{f(x,y_0)}{y_0}$ або $K = K_0 = \dfrac{f(x_0,y_0)}{y_0}$.

Умова $y_0 \neq 0$ не є істотною. Її можна уникнути заміною $z(x) = y(x) + a$, $a \neq 0$. Крім того, вона зникає, якщо $K(x)$ прямує до певної границі при $y_0 \to 0$.

Приклад *. Розглянемо задачу Коші для рівняння Ріккаті:

$$y' + y^2 \sin x = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}; \qquad /12/$$

$$y(x_0) = y_0. \qquad /13/$$

---

* Булычев Ю.Г. Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // ЖВМ и МФ. 1988. Т.28. № 10.

Здійснимо лінеаризацію задачі /I2/-/I3/ на основі задачі /9/-/II/:

$$\tilde{y}' + y_0 \sin x \cdot \tilde{y} = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}; \qquad /I4/$$

$$\tilde{y}(x_0) = y_0. \qquad /I5/$$

y_0		$x_0=0$	$x = 0,349$	$x = 0,698$	$x = I,047$
$y_0=0$	$y(x)$	0	0,I28	0,586	I,646
	$\tilde{y}(x)$	0	0,I28	0,6I0	I,998
	Δ %	0%	0%	4%	2I%
	$y_б(x)$	0	0,I28	0,493	I,597
	$\Delta_б$ %	0%	0%	I5%	3%
$y_0=0,5$	$y(x)$	0,5	0,609	0,892	I,852
	$\tilde{y}(x)$	0,5	0,6II	I,023	2,208
	Δ %	0%	0,3 %	4 %	I9 %
$y_0=1$	$y(x)$	I	I,064	I,305	I,2
	$\tilde{y}(x)$	I	I,066	I,34I	I,259
	Δ %	0 %	0,I8 %	2,7 %	5 %
$y_0=2$	$y(x)$	2	I,899	I,80I	2,I93
	$\tilde{y}(x)$	2	2,I42	2,3I6	2,670
	Δ %	0 %	I2 %	28 %	2I %
$y_0=3$	$y(x)$	3	2,650	2,I64	2,3I5
	$\tilde{y}(x)$	3	2,685	2,032	2,380
	Δ %	0 %	I,5 %	6 %	2,7 %

Точний розв"язок задачі має вигляд

$$y(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x\,(y_0 \cos x_0 - 1)}{y_0 \cos^4 x_0 + 2\cos^3 x_0 - \cos^3 x\,(y_0 \cos x_0 - 1)}. \qquad /I6/$$

Лінеаризований розв"язок, одержаний на основі /I4/-/I5/, має вигляд:

$$y(x)=\exp\{y_0(\cos x-\cos x_0)\}\cdot\{y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\exp(-y_0\cos x)\,dx\}. \qquad /17/$$

У таблиці наведені результати чисельних розрахунків за формулами /I6/, /I7/ у порівнянні з даними, одержаними за методом опорних інтегральних кривих*/останні позначені $y_Б$ /. Як видно з таблиці і формул /I6/, /I7/, наближений розв"язок враховує особливість шуканого розв"язку, а розбіжність між точним і наближеним розв"язками зростає залежно від їх близькості до особливих точок.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.89

УДК 517.9

Й.В.Людкевич, Р.С.Хапко, Т.М.Олійник, М.В.Падалка

МЕТОД КОЛОКАЦІЇ В НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Розв"язуючи нестаціонарні граничні задачі математичної фізики, найбільш доцільно зводити їх до послідовності стаціонарних задач. Існує декілька підходів чисельного розв"язування таких задач. Перший із них полягає у використанні теорії потенціалів, за допомогою яких вихідна диференціальна задача зводиться до інтегрального рівняння вольтерового за часом і фредгольмового за просторовими змінними [1, 4]. Другий підхід базується на використанні методу інтегральних перетворень Чебишева-Лагерра, за допомогою якого поставлена задача також зводиться до послідовності стаціонарних задач [3, 6].

У даній статті розглянемо новий підхід до розв"язування нестаціонарних задач методом колокації за часом або напівдискретним методом [5]. З метою простоти викладу проілюструємо даний метод на одновимірній задачі теплопровідності.

Нехай необхідно знайти функцію $u(x,t)$, що задовольняє рівняння теплопровідності