Лінеаризований розв"язок, одержаний на основі /І4/-/І5/, має вигляд:

$$y(x)=exp\{y_0(\cos x-\cos x_0)\}\cdot\{y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{2\sin x}{\cos^2 x}exp(-y_0\cos x)dx\}. \qquad /17/$$

У таблиці наведені результати чисельних розрахунків за формулами /І6/, /І7/ у порівнянні з даними, одержаними за методом опорних інтегральних кривих*/останні позначені $y_Б$ /. Як видно з таблиці і формул /І6/, /І7/, наближений розв"язок враховує особливість шуканого розв"язку, а розбіжність між точним і наближеним розв"язками зростає залежно від їх близькості до особливих точок.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.89

УДК 517.9

Й.В.Людкевич, Р.С.Хапко, Т.М.Олійник, М.В.Падалка

МЕТОД КОЛОКАЦІЇ В НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Розв"язуючи нестаціонарні граничні задачі математичної фізики, найбільш доцільно зводити їх до послідовності стаціонарних задач. Існує декілька підходів чисельного розв"язування таких задач. Перший із них полягає у використанні теорії потенціалів, за допомогою яких вихідна диференціальна задача зводиться до інтегрального рівняння вольтерового за часом і фредгольмового за просторовими змінними [1, 4]. Другий підхід базується на використанні методу інтегральних перетворень Чебишева-Лагерра, за допомогою якого поставлена задача також зводиться до послідовності стаціонарних задач [3, 6].

У даній статті розглянемо новий підхід до розв"язування нестаціонарних задач методом колокації за часом або напівдискретним методом [5]. З метою простоти викладу проілюструємо даний метод на одновимірній задачі теплопровідності.

Нехай необхідно знайти функцію $u(x,t)$, що задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad /1/$$

нульову початкову умову

$$u(x,0) = 0, \qquad /2/$$

граничні умови

$$u(0,t) = \psi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_1(t), \qquad /3/$$

причому для $\psi_i(t)$, $i = 1,2$ виконуються умови погодженості

$$\psi_0(0) = \psi_1(0) = 0. \qquad /4/$$

Розв"язок першої початково-крайової задачі /1/-/4/ шукаємо в класі функцій $u(x,t) \in C^2(Ц_\infty) \cap C(\overline{Ц}_\infty)$, де $Ц_\infty = [0;1] \times [0;+\infty)$.

Для розв"язування поставленої задачі скористаємось методом колокації за часом, для цього розглянемо часовий інтервал $[0;T]$, на якому необхідно визначити невідому функцію. Введемо на цьому інтервалі рівномірне розбиття з кроком h $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ і систему лінійно незалежних базисних функцій $\{v_k(t), k = \overline{1,n}\}$, для яких виконуються умови

$$v_k(0) = 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad v_k(t) \in C^m[0;T], \quad m \geq 1. \qquad /5/$$

Представимо розв"язок задачі /1/-/4/ у вигляді

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(t) \varphi_k(x), \qquad /6/$$

де $\varphi_k(x)$ – невідомі функції, які підлягають визначенню. Підставивши вираз /6/ у рівняння /1/ і граничні умови /3/ і задовольняючи отримані співвідношення у точках колокації $\{t_i, i = \overline{1,n}\}$, дістанемо систему звичайних диференціальних рівнянь з відповідними граничними умовами.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \varphi_k''(x) - b_{ik} \varphi_k(x)) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \varphi_k(0) = c_i^{(0)}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \varphi_k(1) = c_i^{(1)}, \quad i = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad /7/$$

де

$$a_{ik} = v_k(t_i), \quad b_{ik} = v_k'(t_i), \quad c_i^{(0)} = \psi_0(t_i), \quad c_i^{(1)} = \psi_1(t_i). \qquad /8/$$

Система /7/ розв"язується аналітично в загальному випадку. При цьому функції $v_k(t)$ вибираються у вигляді

$$v_k(t) = t e^{-kt}, \quad k = \overline{1,n}. \qquad /9/$$

Знайшовши невідомі $\varphi_i(x)$, загальний розв"язок задачі визначимо за формулою /6/.

Однак одержання аналітичного розв"язку є досить громіздким, тому викликає інтерес отримання системи граничних задач спеціального трикутного виду, розв"язування якої можна здійснити послідовно на лініях колокації. Для цього зупинимось більш детально на виборі базисних функцій за часом $V_k(t)$. Крім виконання умов /5/, будемо вимагати, щоб кожна базисна функція $V_k(t)$ була відмінна від нуля лише на інтервалі (t_{k-1}, T). Таку систему складають функції, що визначаються за формулою

$$V_k(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0;\, t_{k-1}) \\ \frac{1}{h^2}(t-t_{k-1})^2 e^{-(t-t_{k-1})}, & t\in[t_{k-1};\, T]. \end{cases} \qquad /10/$$

Враховуючи /10/, коефіцієнти системи /7/ будуть мати вигляд

$$\begin{cases} a_{ik}=0,\ b_{ik}=0, & k=\overline{i+1,n} \\ a_{ik}=V_k(t_i),\ b_{ik}=V'_k(t_i), & k=\overline{1,i},\ i=\overline{1,n}. \end{cases} \qquad /11/$$

Тобто система граничних задач /7/ запишеться як

$$\begin{cases} \varphi''_1(x)-\varkappa^2\varphi_1(x)=0 \\ \varphi_1(0)=\beta_1^{(0)};\quad \varphi_1(1)=\beta_1^{(1)} \\ \varphi''_2(x)-\varkappa^2\varphi_2(x)=\alpha_1^{(2)}\varphi_1(x) \\ \varphi_2(0)=\beta_1^{(0)};\quad \varphi_2(1)=\beta_2^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi''_n(x)-\varkappa^2\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^{(n)}\varphi_i(x) \\ \varphi_n(0)=\beta_n^{(0)};\quad \varphi_n(1)=\beta_n^{(1)}, \end{cases} \qquad /12/$$

де

$$\varkappa^2=\frac{2}{h}-1;\quad \beta_i^{(0)}=c_i^{(0)}-\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}\varphi_k(0);$$

$$\alpha_i^{(k)}=\varkappa^2+b_{ki};\quad \beta_i^{(1)}=c_i^{(1)}-\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}\varphi_k(1). \qquad /13/$$

Розв"язки системи /12/ можна послідовно отримати аналітично. Зауважимо також, що вибір базисних функцій, необхідний для зведення системи /7/ до вигляду /12/, не вичерпується лише формулами /10/.

З метою перевірки запропонованого методу було проведено ряд чисельних експериментів. Задача /I/-/4/ розв"язувалася з функціями $\psi_0(t)=t$, $\psi_1(t)=0$. Для знаходження невідомої функції $u(x,t)$ застосовувались два підходи: I/ з базисними функціями /9/ і аналітичним розв"язуванням відповідної системи /7/; 2/ з базисними функціями /I0/ і відповідно розв"язуванням системи /I2/.

x	$t=0{,}1$			$t=0{,}2$		
	$u^{(a)}$	$u^{(1)}$	$u^{(2)}$	$u^{(a)}$	$u^{(1)}$	$u^{(2)}$
0,I	0,0689	0,0702	0,0646	0,I542	0,I543	0,I560
0,2	0,0458	0,0482	0,04I8	0,II68	0,II74	0,II8I
0,3	0,0300	0,0324	0,0270	0,0877	0,0880	0,0873
0,4	0,0I92	0,02I2	0,0I74	0,0648	0,0649	0,0632
0,5	0,0095	0,0I34	0,0II2	0,0444	0,0470	0,0449
0,6	0,0066	0,0082	0,007I	0,0324	0,033I	0,03II
0,7	0,0038	0,0048	0,0044	0,02I7	0,0223	0,0206
0,8	0,0020	0,0025	0,0025	0,0I33	0,0I37	0,0I25
0,9	0,0008	0,00II	0,00I2	0,0063	0,0065	0,0059
$max\,\Delta$		0,0039	0,0043	$max\,\Delta$	0,0026	0,00I8
Δ_{cp}		0,00I7	0,00I8	Δ_{cp}	0,0006	0,00I0

У таблиці наведено порівняння табличних розв"язків, отриманих при використанні двох точок колокації за часом: $u^{(1)}$ – перший підхід; $u^{(2)}$ – другий підхід; $u^{(a)}$ – аналітичний розв"язок [2].

Отримані результати дають змогу пересвідчитись у правильності розробленого алгоритму дискретизації нестаціонарних задач і використати його надалі для розв"язування задач вищої розмірності.

I. Б е р е ж а н с к а я З.С. Численные методы решения уравнений параболического типа для неограниченных кусочно-однородных областей: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. К., I98I. 2. В л а д и м и р о в В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., I974. 3. М у з ы ч у к А.Е. Численное решение начально-краевых задач для волнового уравнения методом интегральных преобразований и граничных интегральных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., I987. 4. П а с и ч н и к Р.М. Численное решение смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения методом интегральных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, I989. 5. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Под ред. Дж.Холла и Дж.Уатта. М., 1979. 6. Х а п к о Р.С. Численное решение краевых задач для телеграфного уравнения на незамкнутых поверхностях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. К., 1989.

Стаття надійшла до редколегії 06.06.90

УДК 519.6

Б.М.Голуб

КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ГЛАДКОЇ ШТРАФНОЇ ФУНКЦІЇ

Для розв"язування загальної задачі нелінійного програмування у праці [2] запропоновано квазіньютонівську модифікацію методу лінеаризації Б.М.Пшеничного, яка використовує негладку штрафну функцію. Однак реалізація алгоритму дещо ускладнена тим, що значення штрафного коефіцієнта наперед невідоме.

У даній статті описаний алгоритм лінеаризації з конструктивним визначенням штрафного параметра для розв"язування задачі

$$\min\{f(x):\ g_i(x)=0,\ i\in I,\quad x\in E^n\},\qquad /1/$$

де $f(x)$, $g_i(x)$, $i\in I$ – неперервно диференційовані функції, I – скінченна множина індексів, E^n – n-мірний евклідів простір.

На k-й ітерації алгоритму розв"язується допоміжна задача

$$\min_p\{\langle f'(x_k),p\rangle+\frac{1}{2}\langle p,A_k p\rangle:\ \langle g_i'(x_k),p\rangle+g_i(x_k)=0,\ i\in I\},\ /2/$$

де A_k – симетрична додатно визначена матриця, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток.

Розв"язок задачі /2/ та її множники Лагранжа позначимо відповідно через $p(x_k)$ та $u^i(x_k)$, $i\in I$, а через $L(x,u)$ – функцію Лагранжа задачі /1/:

$$L(x,u)=f(x)+\langle u,g(x)\rangle,$$

де $g(x)=\{g_i(x),\ i\in I\}$.

Для перерахунку матриць A_k використовується формула

$$A_{k+1}=L_{k+1}D_{k+1}L_{k+1}^T=A_k+B_k+E_{k+1},\qquad /3/$$