методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Под ред. Дж.Холла и Дж.Уатта. М., 1979. 6. Х а п к о Р.С. Численное решение краевых задач для телеграфного уравнения на незамкнутых поверхностях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. К., 1989.

Стаття надійшла до редколегії 06.06.90

УДК 519.6

Б.М.Голуб

КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ГЛАДКОЇ ШТРАФНОЇ ФУНКЦІЇ

Для розв"язування загальної задачі нелінійного програмування у праці [2] запропоновано квазіньютонівську модифікацію методу лінеаризації Б.М.Пшеничного, яка використовує негладку штрафну функцію. Однак реалізація алгоритму дещо ускладнена тим, що значення штрафного коефіцієнта наперед невідоме.

У даній статті описаний алгоритм лінеаризації з конструктивним визначенням штрафного параметра для розв"язування задачі

$$\min\{f(x):\ g_i(x)=0,\ \ i\in I,\ \ \ x\in E^n\},\qquad /1/$$

де $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in I$ – неперервно диференційовані функції, I – скінченна множина індексів, E^n – n-мірний евклідів простір.

На k-й ітерації алгоритму розв"язується допоміжна задача

$$\min_p\{\langle f'(x_k),p\rangle+\tfrac{1}{2}\langle p,A_kp\rangle:\ \langle g_i'(x_k),p\rangle+g_i(x_k)=0,\ \ i\in I\},\ /2/$$

де A_k – симетрична додатно визначена матриця, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток.

Розв"язок задачі /2/ та її множники Лагранжа позначимо відповідно через $p(x_k)$ та $u^i(x_k)$, $i\in I$, а через $L(x,u)$ – функцію Лагранжа задачі /1/:

$$L(x,u)=f(x)+\langle u,g(x)\rangle,$$

де $g(x)=\{g_i(x),\ i\in I\}$.

Для перерахунку матриць A_k використовується формула

$$A_{k+1}=L_{k+1}D_{k+1}L_{k+1}^T=A_k+B_k+E_{k+1},\qquad /3/$$

де L_{k+1} – нижня трикутна одинична матриця; D_{k+1} і E_{k+1} – діагональні матриці; B_k – симетрична матриця малого рангу, що визначає тип квазіньютонівського перерахунку. Процес побудови матриць A_k детально описаний у працях [2, 3].

Для визначення величини кроку на k -й ітерації будемо використовувати запропоновану в праці [1] гладку штрафну функцію

$$\varphi(R_k, x) = f(x) + \frac{R_k}{2}\psi^2(x),$$

де $\psi^2(x) = \|g(x)\|^2$, $\|\cdot\|$ – евклідова норма,

$$R_k = \min_r \{ r \geq R_{k-1}, \langle \varphi'(r, x_k), p_k \rangle + \max\{\psi_k, \beta p_k^2\} \leq 0 \},$$

$$0 < \beta < 1, \quad p_k = p(x_k), \quad \psi_k = \psi(x_k).$$

Сформулюємо алгоритм розв"язування задачі /1/.

Нехай вибрано /2/ числа $0 < \varepsilon < 1/2$, $c_0 > 0$, $0 < \gamma < 1$, $R_0 > 0$, $S > 1$ та початкове наближення x_0.

Загальний крок алгоритму. Нехай точка x_k, матриця A_k і числа c_k, R_k вже побудовані.

1. Визначаємо $p_k = p(x_k)$ та $u_k^i = u^i(x_k)$, $i \in I$ з розв"язку задачі /2/.

2. Якщо $\|p_k\| > c_k$ або $\varphi(R_k, x_k + p_k) > \varphi(R_k, x_0)$, то приймаємо $c_{k+1} = c_k$ і переходимо до кроку 3. Інакше, приймаємо $x_{k+1} = x_k + p_k$, $c_{k+1} = \gamma\|p_k\|$ і переходимо до кроку 4.

3. Починаючи з $\alpha = 1$, дробимо α до першого виконання нерівності

$$\varphi(R_k, x_k + \alpha p_k) \leq \varphi(R_k, x_k) + \alpha\varepsilon \langle \varphi'(R_k, x_k), p_k \rangle \quad /4/$$

і приймаємо $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$.

4. Обчислюємо матрицю A_{k+1} за формулою /3/. Якщо

$$\max_i a_{k+1}^i / \min_i d_{k+1}^i \leq S,$$

де a_{k+1}^i та d_{k+1}^i – i-ті діагональні елементи відповідно матриць A_{k+1} та D_{k+1}, то переходимо до кроку 1. У протилежному випадку приймаємо $A_{k+1} = I_n$ / I_n – одинична матриця/ і переходимо до кроку 1.

Процес припиняється, якщо досягнуто задану точність за $\|p_k\|$

Достатні умови збіжності алгоритму дає така теорема.

<u>Теорема.</u> Нехай виконуються умови:

1/ для довільного $k \geq 0$ точка $x_k \in \Omega$, де Ω – компактна множина;

2/ Градієнти $f'(x)$, $g_i'(x)$, $i \in I$ на множині Ω задовольняють умову Ліпшица і $g_i'(x)$, $i \in I$ лінійно незалежні:

Тоді алгоритм будує послідовність $\{x_k\}$, для якої $\psi(x_k) \to 0$, $p(x_k) \to 0$ при $k \to \infty$ і в будь-якій граничній то.ці цієї послідовності виконуються необхідні умови екстремуму задачі /1/.

Я що, окрім цього, функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in I$ двічі неперервно диференційовані в Ω, x_* - єдина точка із Ω, в якій виконані необхідні умови мінімуму, і

3/ $\langle L''_{xx}(x_*, u_*)p, p\rangle > 0$ для всіх $p \neq 0$ таких, що $\langle g_i'(x), p\rangle > 0$, $i \in I$, причому матриця $L''_{xx}(x_*, u_*)$ невироджена;

4/ має місце рівність

$$\|[A_k - L''_{xx}(x_*, u_*)]p_k\| = o(\|p_k\|), \qquad /5/$$

то послідовність $\{x_k\}$ збігається до x_* з надлінійною швидкістю.

Позначимо $\varphi(N_k, x) = f(x) + N_k\Psi(x)$, $N_k = \|u(x_k)\| + 1$.

Аналогічно до /3/ розглянемо модифікацію алгоритму, в якій α_k вибирається з умови одночасного виконання нерівності /4/ та

$$\varphi(N_k, x_k + \alpha p_k) \leq \varphi(N_k, x_k) + \alpha\varepsilon\langle\varphi'(N_k, x_k), p_k\rangle.$$

Для модифікованого алгоритму залишається в силі теорема, проте умову /5/ можна замінити на таку:

$$L'_x(x, u(x)) \neq L'(\bar{x}, u(x)) \qquad \forall x, \bar{x} \in \Omega,\ x \neq \bar{x},$$

$$\langle (A_k + B_k)z, z\rangle \geq m\|z\|^2,\ m > 0,\ z \in E^n \qquad /6/$$

для всіх k, починаючи з деякого $k \geq 0$.

Відзначимо, що при виконанні умов /1/-/3/ теореми можна довести справедливість дещо слабкішої, ніж /6/, нерівності

$$\langle (A_k + B_k)z, z\rangle > 0, \qquad k \geq K.$$

1. Д а н и л и н Ю.М. Методы квадратичных штрафов на основе линейной аппроксимации // ЖВМ и МФ. 1989. 29. № 6. С.831-843.
2. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации // Кибернетика. 1988. № 6. С.66-71.
3. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации для решения задачи нелинейного программирования // Численные методы и оптимизация: Материалы IУ Симпоз. /Вильянди, 1987 г./. Таллинн, 1988. С.201-206.

Стаття надійшла до редколегії 03.09.90