УДК 518.517.948

С.М.Шахно

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ОДНОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО КЛАСУ ПАРАЛЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему нелінійних рівнянь

$$P(x) = x - \varphi(x) = 0\,, \qquad /1/$$

де $P: D \subset R^n \to R^n$. У цьому повідомленні отримаємо умови збіжності ітераційного процесу [1]

$$x^{k+1,m+1} = x^{k+1,m} - A^k P(x^{k+1,m}),\ m = 0,1,\dots,m_{k+1}-1\,, \qquad /2/$$

$$A^{k+1} = A^k[2I - P'(\bar{x}^{k,m_k-1})A^k],\quad k = 0,1,\dots \qquad /3/$$

$$\bar{x}^{k,m_k-1} = (1-\mu)x^{k,m_k-1} + \mu\varphi(x^{k,m_k-1}),$$

де x^{k,m_k} – останнє наближення до точного розв"язку x^* рівняння /1/, при визначенні якого застосовували апроксимацію оберненого оператора A^{k-1}; $x^{k,m_k} = x^k = x^{k+1,0}$; x^0, A^0 — початкові наближення до x^* і $[P'(x^*)]^{-1}$; $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

Метод /2/, /3/ використовує асинхронну апроксимацію оберненого оператора і включає в себе при $\mu = 0$ запропонований раніше метод А.Ф.Роозе [2]. Перевага методу /2/-/3/ перед відповідним методом з синхронною апроксимацією оберненого оператора [3] полягає в тому, що при реалізації методу /2/, /3/ на двох паралельних процесорах останні не будуть простоювати.

Крім того, порядок збіжності процесу /2/, /3/ більший /2 проти 1,618/.

Достатні умови збіжності ітерацій /2/, /3/ до точного розв"язку x^*, A^* дає наступна теорема.

Теорема. Нехай:

1/ рівняння /1/ має розв"язок x^* і існує $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$, причому $\|A^*\| \leqslant B$;

2/ у сфері $\Omega_* = \{x : \|x - x^*\| \leqslant r_0\}$ справедливі оцінки

$$\|\varphi'(x)\| \leqslant \alpha < 1,$$

$$\|\varphi''(x) - \varphi''(y)\| \leqslant N\|x - y\|, \qquad N > 0;$$

3/ $\|P'(x^*)\| \leq C$;

4/ $h = \max\{Kr_0, G\} < 1$,

де $r_0 = \max\{\|x^0 - x^*\|, \|A^0 - A^*\|\}$,

$K = C + \varkappa L(B + r_0) + \frac{N}{6}(B + r_0)(1+\alpha)^2 r_0$,

$G = Cr_0 + L(B + r_0)^2$, $L \geq \sup\limits_{x \in \Omega} \|\varphi''(x)\|$,

$\varkappa = 1 - \mu + 2\mu\alpha + \frac{1}{2}|2\mu - 1|$;

5/ $m_K > N_1$, $N_1 \geq 2$; $K = 1, 2, \ldots$

Тоді послідовності наближень $\{x^K\}_0^\infty$, $\{A^K\}_0^\infty$, які визначаються в процесі /2/, /3/, збігаються відповідно до x^* і A^*, причому справедливі оцінки

$$\|x^* - x^K\| \leq h^{(N+1)(2^K-1)} r_0, \qquad /4/$$

$$\|A^* - A^K\| \leq h^{2^K-1} r_0, \quad K = 0, 1, \ldots \qquad /5/$$

Відзначимо, що швидкість збіжності ітераційного процесу /2/. /3/ буде найвищою згідно з оцінками /4/, /5/, коли величина h буде найменшою. Легко бачити, що h залежить від вільного параметра μ і набуває найменшого значення при $\mu = 0,5$. Отже, при виконанні умов теореми процес /2/, /3/ із значенням параметра $\mu = 0,5$ матиме найвищу швидкість збіжності. З умови 4 теореми також випливає, що в цьому випадку область збіжності методу буде найширшою.

1. Б а р т и ш М.Я., Ш а х н о С.М. Исследование некоторых классов параллельных методов для решения систем нелинейных уравнений // Применение вычислительной техники и математических методов в научных исследованиях: Тез докл. науч.-техн. конф. Севастополь, 1990. С.5–6. 2. Р о о з е А.Ф. О сходимости асинхронного итерационного метода решения нелинейных уравнений с применением параллельной аппроксимации обратного оператора // Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации: Тез. докл. Ш симпоз. Таллин, 1984. С. 189–190. 3. Ш а х н о С.М. Исследование сходимости однопараметрических итерационных процессов, использующих последовательную и параллельную аппроксимации обратного оператора. Львов, 1990. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 51-Ук90.

Стаття надійшла до редколегії 03.09.90