УДК 518.9

О.В.Хомин

# ІГРОВА ЗАДАЧА ПОЧЕРГОВОГО ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

Розглянемо ігрову задачу групового переслідування об"єктів $z_1, \dots, z_\nu$

$$\dot{z}_i = A_i z_i + \varphi_i(u_i, v), \quad u_i \in U_i, v \in V \qquad /1/$$

в $\mathbb{R}^n$. $A_i$ – квадратні матриці порядку $n$, $\varphi_i(u_i,v): U_i \times V \to \mathbb{R}^n$, $U_i$ та $V$ компакти із $\mathbb{R}^n$. В $\mathbb{R}^n$ виділені множини $M_i^1 = M_i^0 + M_i$, де $M_i^0$ – лінійні підпростори із $\mathbb{R}^n$, а $M_i$ – компакти із ортогональних доповнень $L_i$ до $M_i^0$ у просторі $\mathbb{R}^n$.

Гравці-переслідувачі, що розпоряджаються параметрами $u_i$, намагаються вивести траєкторії $z_i(t)$ на термінальні множини $M_i^1$. Утікач, який реалізує параметр $v$, заважає їм. При цьому, якщо траєкторія $z_{i_*}(t)$ потрапляє на множину $M_{i_*}^1$, то виграш переслідувачів збільшується на величину $q_{i_*}$. Після цього рух об"єкта $z_{i_*}$ на загальну ціну гри не впливає.

Для завершення гри /1/ сумарний виграш переслідувачів повинен бути не меншим від деякої фіксованої величини $Q \geqslant 0$.

Вважаємо, що диференціальна гра /1/ може бути завершена з початкового стану $z_0 = (z_1^0, \dots, z_\nu^0)$ за час $T$, $T = T(z_0)$, якщо існують відображення, що у відповідність парі $(z_0, v_t(\cdot))$ ставлять вимірну функцію $u_i(t) = u_i(z_0, v_t(\cdot)) \in U_i(t)$, $t \in [0,T]$ таку, що сума коефіцієнтів $q_i$ для траєкторій $z_i(t)$, які побували на термінальних множинах $M_i$ до моменту $T$ включно, повинна бути не меншою $Q$ при будь-якій вимірній функції $v(t), t \in [0,T]$ зі значеннями із $V$.

Нехай $\pi_i$ – оператори ортогонального проектування із $\mathbb{R}^n$ на $L_i$, $i = 1, \dots, \nu$. Вводимо багатозначні відображення

$$W_i(t,v) = \pi_i e^{A_i t} \varphi_i(U_i, v),$$
$$W_i(t) = \bigcap_{v \in V} W_i(t,v), \; t \geqslant 0, \quad v \in V.$$

Використовуються позначення $\varphi_i(U_i, v) = \{\varphi_i(u_i, v): u_i \in U_i\}$, $e^{A_i t}$ – фундаментальна матриця однорідної системи $\dot{z} = Az$.

Умова 1 [3]. $\operatorname{dom} W_i(t) = [0, \infty)$ для всіх $i = 1, \dots, \nu$.

Зафіксуємо деякі вимірні селектори $\gamma_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, \nu$, такі, що $\gamma_i(t) \in W_i(t)$ і приймемо

$$\xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot)) = \pi_i e^{A_i t} z_i^0 + \int_0^t \gamma_i(t-\tau)\,d\tau, \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Введомо розв"язувальні функції [2, 3]

$$\alpha_i(t, \tau, z_i^0, v, \gamma_i(\cdot)) = \begin{cases} \max[\alpha_i \geq 0 : \{W_i(t-\tau, v) - \gamma_i(t-\tau)\} \cap \\ \cap \alpha\{M_i - \xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot)) \neq \emptyset\}, \xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot)) \notin M_i \\ t^{-1}, \ \xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot)) \in M_i. \end{cases}$$

Нехай далі $D_j$ – деяка підмножина множини $I = \{1, \dots, \nu\}$, що складається з різних елементів: $0 < j \leq 2^\nu$.

$$D(Q) = \left\{ D_j : \sum_{i \in D_j} q_i > Q \right\}.$$

Позначимо

$$\mu(t, z_0) = 1 - \int_0^t \inf_{v(\cdot)} \max_{D_j \in D(Q)} \min_{i \in D_j} \alpha_i(t, \tau, z_i^0, v, \gamma_i(\cdot))\,d\tau,$$

$$T = T(z_0) = \min\{t \geq 0, \mu(t, z_0) \leq 0\}.$$

Теорема. Нехай для диференціальної гри /1/ виконана умова та існують такі вимірні селектори $\gamma_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, \nu$, що $T = T(z_0) < +\infty$.

Тоді гра переслідування /1/ може бути завершена із початкового стану $z_0$ за час $T(z_0)$.

Доведення даної теореми здійснюється за схемою, викладеною в роботах [1, 2].

Слід відзначити, що за даною схемою переслідування утікача кожним переслідувачем із групи здійснюється незалежно один від одного. У випадку взаємного узгодження дій переслідувачів час успішного завершення гри можна поліпшити.

У ролі ілюстративного прикладу розглянемо гру, в якій рух противників описується системою рівнянь

$$\dot{z}_i(t) = z_i(t) + u_i(t) - v(t),$$
$$z_i(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \ u_i(t) \in U_i, v(t) \in V, \quad i = 1, 2,$$

початкові положення $z_i^0$, $i = 1, 2$ системи такі, що $\|z_1^0\| = \|z_2^0\|$.

Області керувань $U_1 = U_2 = U = \{u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq d\}$,

$V = \{v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \leq \mathcal{S}\}$.

Термінальні множини $M_1 = M_2 = M = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \leq R, \ R > 0\}$.

При потраплянні $z_1(t)$ та $z_2(t)$ на термінальну множину $M$ переслідувачам зараховується величина виграшу $p$ або $1-p$ відповідно, $0 < p < 1$. Приймемо $Q=1$ і визначимо час завершення гри $T$.

Оскільки рух простий, то керування переслідувачів мають вигляд

$$u_i(t) = v(t) - \alpha_i(t, z_i^0, m_i, v) z_i^0, \quad i = 1,2, \quad m_i \in M,$$

де розв"язувальні функції

$$\alpha_i(t, z_i^0, m_i, v) = \frac{1}{\|z_i^0 - m_i\|^2} \Big( (v, z_i^0 - m_i) +$$

$$+ \sqrt{(v, z_i^0 - m_i)^2 + \|z_i^0 - m_i\|^2 (d^2 - \|v\|^2)} \Big).$$

Тоді час завершення гри визначається за формулою

$$T = \min\{t > 0 : t \geq 1/\alpha_*\},$$

де

$$\alpha_* = \min_{v \in V} \max_{m_i \in M} \alpha_i(t, z_i^0, m_i, v),$$

а $i$ приймає будь-яке значення із множини $\{1,2\}$, оскільки $\|z_1^0\| = \|z_2^0\|$. Неважко переконатись, що

$$T = \min\{t > 0 : t \geq 1/\alpha_*\} = \min\left\{t \geq \frac{\|z_1^0\| - R}{d - \mathcal{S}}\right\}.$$

1. Скопецкий В.В., Хомин О.В., Чикрий А.А. Условия разрешимости задачи группового преследования // Кибернетика. 1989. № 3. С.118-120. 2. Чикрий А.А. Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Публикации Центра Банаха. Математическая теория управления. Варшава, 1983. С.81-108. 3. Чикрий А.А., Хомин О.В. Экстремальные селекторы в дифференциальных играх преследования I // Кибернетика. 1988. № 6. С.56-61.

Стаття надійшла до редколегії 03.09.90