УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ПАРАБОЛІЧНА СИСТЕМА

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq \ell,\ 0<t<T\}$ розглядається змішана задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon\Lambda(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,t)=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u\Big|_{x=0}=0, \qquad u\Big|_{x=\ell}=0, \qquad u\Big|_{t=0}=0, \qquad /2/$$

де $u(x,t)$ - вектор невідомих, а $f(x,t)$ - вектор вільних членів розмірностей n : $A(x,t)$, $B(x,t)$ - матриці розмірності $n\times n$; $\Lambda(x,t)=diag(\lambda_1(x,t),\dots,\lambda_n(x,t))$, $\varepsilon>0$ - малий параметр.

Нехай виконуються такі умови:

1/ Усі функції, що входять в /1/, достатньо гладкі.

2/ $\lambda_i(x,t)>0$ $(i=1,\dots,n)$ в D .

3/ Матриця $A(x,t)$ симетрична, отже, власні значення матриці A $\tau_i(x,t)$ $(i=1,\dots,n)$ є дійсні в області D , припустимо також, що $\tau_i(x,t)\neq\tau_j(x,t)$; якщо $i\neq j$ для усіх $(x,t)\in D$ і $\tau_i(0,t)<0$, $\tau_i(\ell,t)>0$ $(i,j=1,\dots,n)$.

4/ Виконуються умови узгодженості в кутових точках $(0,0)$ і $(\ell,0)$ до порядку N , де N - порядок побудованої нижче асимптотики.

При цих припущеннях система /1/, очевидно, параболічна і існує єдиний класичний розв"язок змішаної задачі /1/, /2/.

Асимптотичне розвинення розв"язку задачі /1/, /2/ будуємо методом примежового шару [2] у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\cdot u^i(x,t)+\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^i\Pi^i(\xi,t)+\sum_{i=1}^{N+1}\varepsilon^i Q^i(\eta,t)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $u^i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ - функції регулярної частини асимптотики; $\Pi^i(\xi,t)$, $Q^i(\eta,t)$ $(i=0,\dots,N+1)$ - функції типу примежового шару в околі відповідно лівої границі і правої границі прямокутника D; $\xi=x/\varepsilon$, $\eta=(\ell-x)/\varepsilon$, $R_N(x,t,\varepsilon)$ - залишковий член.

Рівняння для знаходження функцій регулярної частини асимптотики одержуються стандартним чином шляхом підстановки першої суми в /3/ у рівняння /1/ і зрівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , що д...

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + A(x,t)\frac{\partial u^i}{\partial x} + B(x,t)u^i = f^i(x,t) \quad (i=0,\dots,N), \qquad /4/$$

де $f^0(x,t) \equiv f(x,t)$, $f^i(x,t) = \Lambda(x,t)\dfrac{\partial^2 u^{i-1}}{\partial x^2}$ $(i=1,\dots,N)$.

Рівняння для знаходження $\Pi^i(\xi,t)$ одержуються шляхом підстановки в однорідне рівняння /1/, в якому проведено регуляризуюче перетворення $\xi = x/\varepsilon$ і взяті розклади коефіцієнтів у скінченні стрічки Тейлора в околи $x=0$ другої суми з /3/ і зрівнюванні коефіцієнтів при однакових степенях ε , що дає

$$-\Lambda(0,t)\frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial \xi^2} + A(0,t)\frac{\partial \Pi^i}{\partial \xi} = G^i(\xi,t) \quad (i=0,1,\dots,N+1), \qquad /5/$$

де $G^0(\xi,t) \equiv 0$, $G^i(\xi,t)$, $(i=1,\dots,N+1)$, легко виписуються в явному вигляді і виражаються через $\Pi^j(\xi,t)$ $(j<i)$ та їх похідні.

Аналогічним чином з очевидними відмінностями одержуються і рівняння для $Q^i(\eta,t)$ $(i=0,\dots,N+1)$

$$\Lambda(\ell,t)\frac{\partial^2 Q^i}{\partial \eta^2} + A(\ell,t)\frac{\partial Q^i}{\partial \eta} = H^i(\eta,t) \quad (i=0,\dots,N+1), \qquad /6/$$

де $H^0(\eta,t) \equiv 0$, $H^i(\eta,t)$ $(i=1,\dots,N+1)$ легко виписуються в явному вигляді і виражаються через $Q^j(\eta,t)$ $(j<i)$ та їх похідні.

Умови /2/ дають

$$u^i(x,0) = 0 \qquad (i=0,\dots,N); \qquad /7/$$

$$\Pi^i(0,t) = -u^i(0,t) \qquad (i=0,\dots,N+1), \quad u^{N+1} \equiv 0; \qquad /8/$$

$$Q^i(0,t) = -u^i(\ell,t) \qquad (i=0,\dots,N+1), \quad u^{N+1} \equiv 0. \qquad /9/$$

До них, очевидно, треба приєднати ще такі умови:

$$\Pi^i(\xi,t) \to 0 \text{ при } \xi \to \infty \qquad (i=0,\dots,N+1); \qquad /10/$$

$$Q^i(\eta,t) \to 0 \text{ при } \eta \to \infty \qquad (i=0,\dots,N+1). \qquad /11/$$

Таким чином, функції регулярної частини асимптотики є розв"язками задач Коші для гіперболічних систем /з огляду на умови /3// першого порядку /4/, /7/. Граничні умови не задаються через припущення 3/ про власні значення матриці $A(x,t)$ в точках $(0,t)$ і (l,t). Функції $u^i(x,t)$ одержуються рекурентно методом характеристик [1].

Легко показати, що функції $\Pi^i(\xi,t)$, $Q(\eta,t)$, $(i=0,\dots,N+1)$, які є розв"язками відповідно задач /4/, /8/, /10/ і /6/, /9/, /11/, є функціями типу примежового шару в околі відповідно лівої і правої границі прямокутника D. Вони одержуються рекурентно після знаходження $u^i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$. Умови узгодження /4/ дають $\Pi^i|_{t=0}=0$, $Q^i|_{t=0}=0$ $(i=0,\dots,N+1)$ /більше того, вони звідси одержуються/, що легко перевіряється і використано при знаходженні початкових умов /7/.

Оцінка залишкового члена одержана методом інтегралів енергії [3] і має вигляд $\|R_N(x,t,\varepsilon)\| \le C\varepsilon^{N+1}$, де константа C не залежить від параметра ε.

1. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып. 3. 87-104. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122. 3. Курант Р. Уравнение с частными производными. М., 1964.

Стаття надійшла до редколегії 30.10.90