УДК 517.948

Р.С.Хапко, А.А.Переймибіда

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНОГО ГРАНИЧНО-ЧАСОВОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ТЕЛЕГРАФНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

Наближене розв"язування нестаціонарних задач математичної фізики за допомогою інтегральних рівнянь /ІР/ можна здійснювати декількома підходами: застосування інтегрального перетворення Чебишева-Лагерра по часу [2] і використання теорії потенціалів [3-5].

Ця стаття присвячена чисельному розв"язуванню ІР, до якого зводиться плоска перша початково-крайова задача для телеграфного рівняння.

Розглянемо ІР

$$\int_0^t d\tau \int_L G(t-\tau, R)\, \sigma(\tau, P)\, d\ell_P = f(M,t), \qquad /1/$$

де

$$G(t,R) = \frac{ch\left(\alpha\sqrt{t^2 - R^2/a^2}\right)}{\sqrt{t^2 - R^2/a^2}}\, e^{-pt} E_+(t - R/a). \qquad /2/$$

L - крива на площині, задана параметрично; $R=|MP|$ - відстань; $E_+(x)$ - функція Хевісайда; $f(M,t)$ - відома функція; $\sigma(\tau,P)$ - невідома густина; α, a, p - відомі константи.

Враховуючи параметричне представлення кривої L, перепишемо /1/ у вигляді

$$\int_0^t d\tau \int_{T_1}^{T_2} G(t-\tau, R)\, \sigma(\tau, \vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta = f(\bar{\vartheta}, t), \qquad /3/$$

де $[T_1, T_2]$ - проміжок зміни параметру ϑ кривої L; $F(\vartheta)$ - елемент дуги.

Для розв"язування рівняння /3/, яке є вольтеровим за часовою змінною і фредгольмовим за просторовою, скористаємось методом колокації [3, 5]. Приймемо, що $t \in [0, T]$ і розіб"ємо цей відрізок на рівновеликі проміжки з кроком h: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots < t_N = T$. Введемо на цьому розбитті систему кусково-постійних лінійно незалежних базисних функцій $\{\Phi_k(\tau),\ k=\overline{1,N}\}$.

Вважаючи $t = t_n$ і представляючи невідому густину у вигляді

$$G(\tau, \vartheta) = \sum_{K=1}^{n} \sigma_K(\vartheta)\, \Phi_K(\tau), \qquad /4/$$

із /3/ отримаємо

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} d\tau \int_{T_1}^{T_2} G(t_n - \tau, R)\, \sigma_n(\vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta = f(\bar{\vartheta}, t_n) -$$
$$- \sum_{K=1}^{n-1} \int_{t_{K-1}}^{t_K} d\tau \int_{T_1}^{T_2} G(t_n - \tau, R)\, \sigma_K(\vartheta)\, F(\vartheta)\, d\vartheta, \qquad /5/$$

де враховано вигляд функції $\Phi_K(\tau)$.

Ввівши позначення

$$D_{Kn}(\vartheta, \bar{\vartheta}) = \int_{t_{K-1}}^{t_K} G(t_n - \tau, R)\, d\tau, \qquad /6/$$

перепишемо рівняння /5/ у вигляді

$$\int_{T_1}^{T_2} \sigma_n(\vartheta)\, D_{nn}(\vartheta, \bar{\vartheta})\, F(\vartheta)\, d\vartheta = f(\bar{\vartheta}, t_n) -$$
$$- \sum_{K=1}^{n-1} \int_{T_1}^{T_2} \sigma_K(\vartheta)\, D_{Kn}(\vartheta, \bar{\vartheta})\, F(\vartheta)\, d\vartheta. \qquad /7/$$

Таким чином, позбувшись у /3/ з допомогою методу колокації залежності від часу, ми отримали рекурентну послідовність ІР Фредгольма першого роду /7/. Для її подальшого розв"язування важливим є з"ясування поведінки ядра $D_{nn}(\vartheta, \bar{\vartheta})$ при суміщенні точок колокації та інтегрування. Після нескладних замін, /6/ можна записати

$$D_{nn}(\vartheta, \bar{\vartheta}) = E_+(h-r) \int_r^h \frac{ch(\alpha\sqrt{z^2 - r^2})}{\sqrt{z^2 - r^2}}\, e^{-pz}\, dz, \quad r = R/a. \qquad /8/$$

Далі у формулі /8/ здійснимо такі перетворення

$$D_{nn}(\vartheta, \bar{\vartheta}) = E_+(h-r)\left\{\int_r^h \frac{ch(\alpha\sqrt{z^2 - r^2}) - 1}{\sqrt{z^2 - r^2}}\, e^{-pz}\, dz\; + \right. \qquad /9/$$
$$\left. + \int_r^h \frac{e^{-pz}}{\sqrt{z^2 - r^2}}\, dz \right\} = E_+(h-r)\left\{F_1(\vartheta, \bar{\vartheta}) + F_2(\vartheta, \bar{\vartheta})\right\}.$$

Легко бачити, що функція $F_1(\vartheta, \bar{\vartheta})$ не має ніяких особливостей, а $F_2(\vartheta, \bar{\vartheta})$ можна обчислити таким чином [1]:

$$F_2(\nu,\bar{\nu}) = \int_r^{\infty} \frac{e^{-pz}}{\sqrt{z^2-r^2}}\,dz - \int_n^{\infty} \frac{e^{-pz}}{\sqrt{z^2-r^2}}\,dz = \qquad /10/$$

$$= K_0(pz) - F_3(\nu,\bar{\nu}),$$

де $K_0(x)$ – функція Макдональда; а $F_3(\nu,\bar{\nu})$ – неперервна функція. Отже, виходячи із /10/, коефіцієнти $D\,nn(\nu,\bar{\nu})$ мають логарифмічну особливість, яку необхідно врахувати при розв"язуванні ІР /7/.

Розіб"емо проміжок $[T_1, T_2]$ на N_1 вузлів $T_1 = \nu_0 < \nu_1 < \dots \nu_{N_1} = T_2$ та апроксимуємо густини $\sigma_n(\nu)$ як

$$\sigma_n(\nu) = \sum_{k=1}^{N_1} a_n^{(k)} \Phi_k(\nu), \qquad /11/$$

де $\Phi_k(\nu)$ – кусково-по[с]тійні базові функції; $a_n^{(k)}$ – невідомі коефіцієнти.

Підставляючи /11/ в /7/ і задовольняючи ІР в точках колокації $(\bar{\nu}_i, i=\overline{1,N_1})$, дістаємо послідовність систем лінійних алгебраїчних рівнянь /СЛАР/

$$\sum_{j=1}^{N_1} a_n^{(j)} A_{ij}^{(0)} = f(\bar{\nu}_i, t_n) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{N_1} a_k^{(j)} A_j^{(k)}, \qquad /12/$$

де

$$A_{(ij)}^{(k)} = \int_{\nu_{j-1}}^{\nu_j} D\,kn(\nu,\bar{\nu}_i)\cdot F(\nu)\,d\nu. \qquad /13/$$

Оскільки коефіцієнти $A_{ij}^{(n)}$ згідно з /8/ не залежать від n, то при розв"язуванні послідовності СЛАР /12/ матриця формується лише один раз і для чергового моменту часу t_n потрібно перераховувати тільки праву частину. Необхідно також відзначити, що при обчисленні коефіцієнтів $A_{ij}^{(k)}$ слід враховувати наявність логарифмічної особливості /10/, виділення якої здійснюється методом Канторовича [3].

1. Б р ы ч к о в Ю.А., П р у д н и к о в А.П., М а р и ч е в О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1986. 2. Г а л а з ю к В.А., Х а п к о Р.С. Методи інтегрального перетьорення Чебишева-Лагерра й інтегральних рівнянь у початково-крайових задачах для телеграфного рівняння // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1990. № 8. С.11-14. 3. Л ю д к е в и ч И.В., С т а н ь к о О.В., Х а п к о Р.С. Численное решение первой краевой задачи для телеграфного уравнения методом теории потенциала. Львов,

1987. 8 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 2357-Ук87. 4. Н о в и к о в И.А. Трехмерные потенциалы для телеграфного уравнения и их приложения к краевым задачам теплопроводности // Инж.-физ. журн. 1979. Т.36. № 1. С.139-146. 5. П а с и ч н ы к Р.М. Численное решение смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения методом интегральных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1989.

Стаття надійшла до редколегії 23.10.90

УДК 539.3

Я.Г.Савула, О.С.Коссак

АНАЛІЗ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ КОМБІНОВАНОЇ МОДЕЛІ

1. Постановка задачі. Розглянемо пружне тіло обертання, яке займає область $\Omega^* \subset R^3$. Нехай область Ω^* складається з двох областей $\Omega^* = \Omega_1^* \cup \Omega_2^*$. Тут $\Omega_1^* = \{r, \varphi, z : r, z \in \Omega_1, 0 \le \varphi < 2\pi\}$,

$$\Omega_2^* = \{\alpha_1, \varphi, \alpha_3 : \alpha_1, \varphi \in \Omega_2, \alpha_1^0 \le \alpha_1 \le \alpha_2^e, 0 \le \varphi < 2\pi, -h/2 \le \alpha_3 \le \frac{h}{2}\},$$

де Ω_1 – двовимірна область з Ліпшіцевою границею [4] $\Gamma_1 \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_1^{(i)}$. $\alpha_1, \varphi, \alpha_3$ – ортогональна система криволінійних координат, у якій поверхні $\alpha_1 = const$, $\alpha_3 = const$ є граничними поверхнями області Ω_2. Припустимо, що область Ω_2 є витягнутою, тобто її характерний розмір за напрямком α_3 значно менший від розміру за напрямком α_1 /див. рисунок/.