1987. 8 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 2357-Ук87. 4. Н о в и к о в И.А. Трехмерные потенциалы для телеграфного уравнения и их приложения к краевым задачам теплопроводности // Инж.-физ. журн. 1979. Т.36. № 1. С.139-146. 5. П а с и ч н ы к Р.М. Численное решение смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения методом интегральных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1989.

Стаття надійшла до редколегії 23.10.90

УДК 539.3

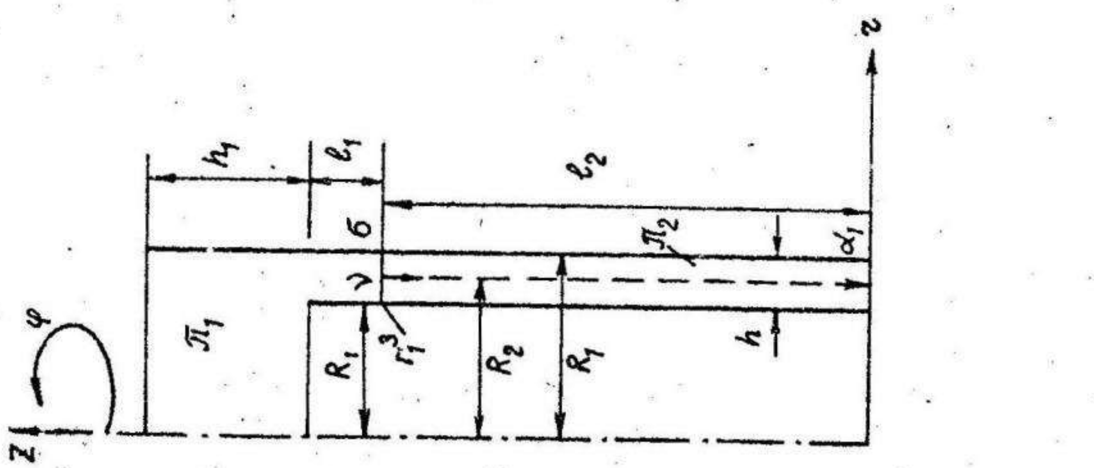
Я.Г.Савула, О.С.Коссак

АНАЛІЗ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ КОМБІНОВАНОЇ МОДЕЛІ

1. Постановка задачі. Розглянемо пружне тіло обертання, яке займає область $\Omega^* \subset R^3$. Нехай область Ω^* складається з двох областей $\Omega^* = \Omega_1^* \cup \Omega_2^*$. Тут $\Omega_1^* = \{r, \varphi, z : r, z \in \Omega_1, 0 \le \varphi < 2\pi\}$,

$$\Omega_2^* = \{\alpha_1, \varphi, \alpha_3 : \alpha_1, \varphi \in \Omega_2, \alpha_1^0 \le \alpha_1 \le \alpha_2^e, 0 \le \varphi < 2\pi, -h/2 \le \alpha_3 \le \frac{h}{2}\},$$

де Ω_1 – двовимірна область з Ліпшіцевою границею [4] $\Gamma_1 \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_1^{(i)}$. $\alpha_1, \varphi, \alpha_3$ – ортогональна система криволінійних координат, у якій поверхні $\alpha_1 = const$, $\alpha_3 = const$ є граничними поверхнями області Ω_2. Припустимо, що область Ω_2 є витягнутою, тобто її характерний розмір за напрямком α_3 значно менший від розміру за напрямком α_1 /див. рисунок/.



Вільні коливання пружного середовища, яке займає область Ω^*, опишемо в області Ω^*_1 співвідношеннями лінійної теорії пружності [5]

$$D_1^{T(1)}\sigma^{T(1)} - \omega^2 M^{(1)} u^{(1)} = 0, \quad x = (r, \varphi, z) \in \Omega^{*\varphi}_1; \qquad /1.1/$$

$$\varepsilon^{(1)} = D^{(1)} u^{(1)}, \quad x = (r, \varphi, z) \in \Omega^*_1; \qquad /1.2/$$

$$\sigma^{(1)} = C^{(1)} \varepsilon^{(1)}, \quad x = (r, \varphi, z) \in \Omega^*_1, \qquad /1.3/$$

а в області Ω_2 співвідношеннями лінійної теорії оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю [3]

$$D_1^{(1)}\sigma^{(2)} - \omega^2 M^{(2)} u^{(2)} = 0, \quad \alpha = (\alpha_1, \varphi) \in \Omega_2; \qquad /1.4/$$

$$\varepsilon^{(2)} = D^{(2)} u^{(2)}, \quad \alpha = (\alpha_1, \varphi) \in \Omega_2; \qquad /1.5/$$

$$\sigma^{(2)} = C^{(2)} \varepsilon^{(2)}, \quad \alpha = (\alpha_1, \varphi) \in \Omega_2. \qquad /1.6/$$

Тут $D_1^{(1)}, D^{(1)}, D_1^{(2)}, D^{(2)}$ – матричні диференціальні оператори [5, 6]. Вектори $u^{(1)}, u^{(2)}, \varepsilon^{(2)}, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}$ – переміщень, напружень і зусиль-моментів мають вигляд

$$u^{(1)} = (u_r^{(1)}, u_\varphi^{(1)}, u_z^{(1)})^T, \quad u^{(2)} = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, w^{(2)}, \gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)})^T;$$

$$\varepsilon^{(1)} = (\varepsilon_{rr}^{(1)}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}, \varepsilon_{zz}^{(1)}, \varepsilon_{\varphi z}^{(1)}, \varepsilon_{r\varphi}^{(1)}, \varepsilon_{rz}^{(1)})^T;$$

$$\sigma^{(1)} = (\sigma_{rr}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(1)}, \sigma_{r\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi z}^{(1)}, \sigma_{rz}^{(1)})^T;$$

$$\sigma^{(2)} = (T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, S^{(2)}, Q_1^{(2)}, Q_2^{(2)}, M_1^{(2)}, M_2^{(2)}, H^{(2)})^T;$$

$M^{(1)}$, $M^{(2)}$ матриці мас; ω – кругова частота вільних коливань. На границях областей Ω^*_1, Ω^*_2 припустимо заданими граничні умови

$$G_2^{(1)} G_1^{(1)} \sigma^{(1)} = 0, \quad r, z \in \Gamma_1^{(1)}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi; \qquad /1.7/$$

$$G_2^{(1)} u^{(1)} = 0, \quad r, z \in \Gamma_1^{(2)}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi; \qquad /1.8/$$

$$G_1^{(2)} \sigma^{(2)} = 0, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \Gamma_2^{(2)}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi; \qquad /1.9/$$

$$G_2^{(2)} u^{(2)} = 0, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \Gamma_2^{(2)}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \qquad /1.10/$$

Тут $G_1^{(1)}, G_1^{(2)}, G_2^{(1)}, G_2^{(2)}$ – матриці констант у граничних умовах.

На поверхні $\Gamma_1^{(3)} = \{ \Gamma_1^{(3)} = \Gamma_2^{(3)}, \alpha_1 = const, -h/2 \le \alpha_3 \le h/2,$ $0 \le \alpha_2 \le 2\pi \}$ запишемо умови спряження у нормальній системі координат на поверхні ν, τ, де ν – зовнішня нормаль до границі $\Gamma_1^{(3)}$, τ – нормаль до серединної поверхні $\alpha_3 = 0$.

$$u_\nu^{(1)} = u_1^{(2)} + \gamma_1^{(2)}\alpha_3, \quad u_\tau^{(1)} = w^{(2)}, \quad u_\theta^{(1)} = u_2^{(2)} + \chi_2^{(2)}\alpha_3; \qquad /I.11/$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\nu\nu}^{(1)} d\alpha_3 = T_1^{(2)}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\nu\nu}^{(1)} \alpha_3 d\alpha_3 = M_1^{(2)}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\nu\tau}^{(1)} d\alpha_3 = Q_1^{(2)},$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\nu\theta}^{(1)} d\alpha_3 = S^{(2)}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\nu\theta}^{(1)} \alpha_3 d\alpha_3 = H^{(2)}. \qquad /I.12/$$

Співвідношення /I.11/ виражають умови нерозривності переміщень у точках, які лежать на поверхні спряження, а співвідношення /I.12/ – умови статичної рівноваги. У матричному записі ці співвідношення мають вигляд

$$u_t^{(1)} = G_3 u^{(2)} \quad \text{або} \quad G_2^{(1)} u^{(1)} = G_3 u^{(2)}; \qquad /I.13/$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} G_3 \sigma_t^{(1)} d\alpha_3 = \sigma^{(2)} \text{ або } \int_{-h/2}^{h/2} G_3 C_2^{(1)} G_1^{(1)} = \sigma^{(2)}; \qquad /I.14/$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, комбінована модель вільних коливань для осесиметричних складових тіл обертання зводиться до розв"язку задачі /I.1/–/I.6/ з граничними умовами /I.7/–I.10/ та умовами пружного спряження /I.13/–/I.14/.

2. Варіаційна постановка задачі. Використовуючи результати праць [4 – 6], зведемо задачу /I.1/–/I.6/ до мінімізації функціоналу

$$\iiint_{\Omega_1} (D^{(1)}u^{(1)})^T C^{(1)} D^{(1)} u^{(1)} d\Omega_1 - \omega^2 \iiint_{\Omega_1} u^{(1)T} M^{(1)} u^{(1)} d\Omega_1 + \iint_{\Omega_2} (D^{(2)}u^{(2)})^T E_0 C^{(2)} D^{(2)} u^{(2)} - \omega^2 \iint_{\Omega_2} u^{(2)T} M^{(2)} u^{(2)} d\Omega_2. \qquad /2.1/$$

На множині функцій $u^{(1)}, u^{(2)}$, які задовольняють кінематичні граничні умови /I.8/, /I.10/ та умови спряження /I.13/, E_0 – діагональна матриця.

Можна показати, що рівняннями Ейлера функціоналу /2.I/ є співвідношення /I.I/, /I.4/, записані з допомогою виразів /I.2/, /I.3/, /I.5/ та /I.6/ через переміщення $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, а також статичні граничні умови /I.7/, /I.9/ і умови пружного спряження /I.I4/.

Оскільки задоволення граничних умов спряження /I.I3/ викликає значні труднощі, дамо ще одну варіаційну постановку задачі

$$\iiint\limits_{\Omega_1} \left(D^{(1)} u_\varepsilon^{(1)}\right)^T G^{(1)} D^{(1)} u_\varepsilon^{(1)}\, d\Omega_1 - \omega^2 \iiint\limits_{\Omega_1} u_\varepsilon^{(1)} M^{(1)} u_\varepsilon^{(1)}\, d\Omega_1 +$$

$$+\iint\limits_{\Omega_2} \left(D^{(2)} u_\varepsilon^{(2)}\right)^T E_c C^{(2)} D^{(2)} u_\varepsilon^{(2)} - \omega^2 \iint\limits_{\Omega_2} u_\varepsilon^{(2)T} M^{(2)} u_\varepsilon^{(2)}\, d\Omega_2 + \qquad /2.2/$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Gamma_1^{(3)}} \left(G_2^{(1)} u_\varepsilon^{(1)} - G_3^T u_\varepsilon^{(2)}\right)^T \left(G_2 u_\varepsilon^{(1)} - G_3^T u_\varepsilon^{(2)}\right) d\Gamma_1 \underset{\varepsilon \to 0}{=} 0$$

на множині функцій, які задовольняють умови /I.8/, /I.I0/.

Можна показати, що їй еквівалентна крайова задача

$$\begin{array}{ll}
D_1^{(1)T} C^{(1)} D^{(1)} u_\varepsilon^{(1)} - \omega^2 M^{(1)} u_\varepsilon^{(1)} = 0, & x \in \Omega_1^*; \\
D_1^{(2)} C^{(2)} D^{(2)} u_\varepsilon^{(2)} - \omega^2 M^{(2)} u_\varepsilon^{(2)} = 0, & \alpha \in \Omega_2; \\
G_2^{(1)} G_1^{(1)} \sigma_\varepsilon^{(1)} = 0, & x \in \Gamma_1^{(1)}; \\
G_2^{(1)} u_\varepsilon^{(1)} = 0, & x \in \Gamma_1^{(2)}; \\
G_1^{(2)} \sigma_3^{(2)} = 0, & \alpha \in \Gamma_2^{(1)}; \\
G_2^{(2)} u_\varepsilon^{(2)} = 0, & \alpha \in \Gamma_2^{(1)}; \\
G_2^{(1)} G_1^{(1)} \sigma_\varepsilon^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(G_2^{(1)} u_\varepsilon^{(1)} - G_3 u_\varepsilon^{(2)}\right) = 0, & x \in \Gamma_1^{(3)};\ \alpha \in \Gamma_2^{(3)}; \\
-G_1^{(2)} \sigma_3^{(2)} + \int\limits_{-h/2}^{h/2} G_3 C_2^{(1)} G_1^{(1)} \sigma_\varepsilon^{(1)} d\alpha_3 = 0, & x \in \Gamma_1^{(3)};\ \alpha \in \Gamma_2^{(3)}.
\end{array}$$

Тут $\sigma_\varepsilon^{(1)} = C^{(1)} D^{(1)} u_\varepsilon^{(1)}$, $\sigma_\varepsilon^{(2)} = C^{(2)} D^{(2)} u_\varepsilon^{(2)}$.

Отже, з рівняння /2.2/ при $\varepsilon \to 0$ одержуємо систему рівнянь комбінованої моделі.

3. <u>Напіваналітичний метод скінченних елементів /НМСЕ/.</u> Для дослідження вільних коливань тіл обертання застосовуємо НМСЕ [6]. Представимо переміщення в тілі та в оболонці за круговою координатою у вигляді рядів Фур"є за повною системою тригонометричних функцій. По інших змінних використаємо кусково-квадратичні апрокси-

мації методу скінченних елементів. Шукані вектори $u_e^{(1)}$ та $u_e^{(2)}$ запишемо на скінченних елементах у вигляді

$$u_e^{(1)}=\sum_{m=1}^{L}\Phi_m^{(1)}N^{(1)}q_e^{(1)}; \qquad /3.1/$$

$$u_e^{(2)}=\sum_{m=1}^{L}\Phi_m^{(2)}N^{(2)}q_e^{(2)}, \qquad /3.2/$$

де

$$q_e^{(1)}=\left(u_{r1e}^{(1)},u_{z1e}^{(1)},u_{\varphi 1e},\ldots,u_{r8e}^{(1)},u_{z8e}^{(1)},u_{\varphi 8e}^{(1)}\right)^T;$$

$$q_e^{(2)}=\left(u_{11e}^{(2)},u_{11e}^{(2)},w_{1e}^{(2)},\gamma_{11e}^{(2)},\gamma_{21e}^{(2)},\ldots,\gamma_{31e}^{(2)}\right)^T;$$

$$N^{(1)}=\left[\Lambda_1^{(1)},\Lambda_2^{(1)},\ldots,\Lambda_8^{(1)}\right];\quad N^{(2)}=\left[\Lambda_1^{(2)},\Lambda_2^{(2)},\Lambda_3^{(2)}\right];$$

$$\Lambda_k^{(2)}=\begin{bmatrix}\varphi_k^{(2)}&0&0&0&0\\0&\varphi_k^{(2)}&0&0&0\\0&0&\varphi_k^{(2)}&0&0\\0&0&0&\varphi_k^{(2)}&0\\0&0&0&0&\varphi_k^{(2)}\end{bmatrix};\quad \Lambda_j^{(1)}=\begin{bmatrix}\varphi_j^{(1)}&0&0\\0&\varphi_j^{(1)}&0\\0&0&\varphi_j^{(1)}\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}k=\overline{1,8}\\ j=\overline{1,3}\end{matrix}$$

$$\Phi_m^{(2)}=\begin{bmatrix}\psi_m^{1(2)}&0&0&0&0\\0&\psi_m^{2(2)}&0&0&0\\0&0&\psi_m^{3(2)}&0&0\\0&0&0&\psi_m^{4(2)}&0\\0&0&0&0&\psi_m^{5(2)}\end{bmatrix};\quad \Phi_m^{(1)}=\begin{bmatrix}\psi_m^{1(1)}&0&0\\0&\psi_m^{2(1)}&0\\0&0&\psi_m^{3(1)}\end{bmatrix}.$$

Тут $\psi_m^{i(1)}$ / $i=1,3$/, $\psi_m^{i(2)}$ / $i=1,5$/ – функції, які задовольняють ум и періодичності і є повною системою тригонофункцій; $\varphi_k^{(1)}$, $\varphi_k^{(2)}$ – двовимірні та одновимірні квадратичні базові функції МСЕ [2, 6].

Підставимо /3.1/ і /3.2/ відповідно в /2.3/ і /2.3/ та підсумуємо за елементами. Враховуючи ортогональність тригонометричних функцій, зведемо задачу для кожної m -ї гармоніки до узагальненої проблеми на власні значення

$$K_m Q_m-\omega^2 M_m Q_m=0,$$

де K_m – матриця жорсткості; M_m – матриця маси;

Q_m – вектор вузлових значень власної форми коливань.

Узагальнена проблема на власні значення розв"язується методом ітерацій у підпросторі [1].

Дослідження можливостей запропонованої схеми напіваналітичного методу скінченних елементів до розв"язку задач про вільні коливання тіл обертання проводилися на прикладі скляного циліндра / $R_2 = 0{,}0047$, $l_2 = 0{,}045$, $h = 0{,}0002$/ з дном / $R_1 = 0{,}0048$, $R_1^* = 0{,}0046$, $h_1 = 0{,}002$, $l_1 = 0{,}001$/. Тут $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-8}$. Розрахунки проводились на різних скінченно-елементних сітках. При розбитті області Ω_1 /4x3 елементи/ і області Ω_2 /8 елементів/ одержана задовільна точність результатів. Порівняємо власні частоти $\omega / 2\pi$ вільних коливань цієї конструкції, знайдених за комбінованою моделлю за тривимірною лінійною теорією пружності / m – номер гармоніки, № – порядковий номер частоти/:

	№	Комбінована модель	Теорія пружності
0	I	$0{,}6546968 \cdot 10^4$	$0{,}6420504 \cdot 10^4$
	2	$0{,}7459245 \cdot 10^4$	$0{,}7459510 \cdot 10^4$
	3	$0{,}3552618 \cdot 10^5$	$0{,}3552165 \cdot 10^5$
	4	$0{,}5461535 \cdot 10^5$	$0{,}5473490 \cdot 10^5$
	5	$0{,}6783067 \cdot 10^5$	$0{,}6781131 \cdot 10^5$
1	I	$0{,}7095935 \cdot 10^3$	$0{,}7045663 \cdot 10^3$
	2	$0{,}7812544 \cdot 10^4$	$0{,}7831342 \cdot 10^4$
	3	$0{,}2115581 \cdot 10^5$	$0{,}2127773 \cdot 10^5$
	4	$0{,}4009361 \cdot 10^5$	$0{,}4042776 \cdot 10^5$
	5	$0{,}6244621 \cdot 10^5$	$0{,}6307779 \cdot 10^5$
2	I	$0{,}9671028 \cdot 10^4$	$0{,}9725856 \cdot 10^4$
	2	$0{,}1981993 \cdot 10^5$	$0{,}2011216 \cdot 10^5$
	3	$0{,}3545964 \cdot 10^5$	$0{,}3423425 \cdot 10^5$
	4	$0{,}4865680 \cdot 10^5$	$0{,}5018646 \cdot 10^5$
	5	$0{,}6432315 \cdot 10^5$	$0{,}6697363 \cdot 10^5$

I. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., I982. 2. Коссак О.С. Численное решение задач о свободных колебаниях составных оболочек вращения. Львов, I989. 23 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 644Ук-89. 3. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, I978. 4. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., I985. 5. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л., 1978. 6. С а в у л а Я.Г. Задачи механики деформирования оболочек с разными срединными поверхностями: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1986.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.90

УДК 517.946

М.М.Притула, А.К.Прикарпатський

СПЕЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНЯННЯ ЛАКСА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

1. Нехай задана нелінійна однорідна динамічна система $u_t = K[u]$ на гладкому многовиді M, де $K \to T(M)$ - відповідне векторне поле, $t \in \mathbb{R}$ - еволюційний параметр.

Справедлива така лема Лакса:

Лема [3]. Якщо гладкий за Фреше функціонал $\gamma : M \to \mathbb{R}$ є інваріантом динамічної системи $u_t = K[u]$ на M, тобто $d\gamma/dt = 0$ на її орбітах, то величина $\varphi = \mathrm{grad}\, \gamma \in T^*(M)$ задовольняє характеристичне рівняння $L_K \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi_t + K'^* \varphi = 0$, де L_K - похідна Лі [2] вздовж векторного поля $K : M \to T(M)$.

Враховуючи, що виконана властивість Вольтери $\varphi' = \varphi'^*$ /відносно стандартної білінійної форми / . , . / на $T^*(M) \times T(M)$ легко встановлюється зворотна

Теорема 1. Якщо $\varphi \in T^*(M)$ - однорідний розв"язок рівняння Лакса $\varphi_t + K'^* \varphi = 0$ з умовою Вольтери $\varphi' = \varphi'^*$, то функціонал $\gamma = \int_0^1 d\lambda (\varphi[u\lambda], u) : M \to \mathbb{R}$ - відповідний інваріант динамічної системи $u_t = K[u]$.

2. Розглянемо тепер інші однорідні розв"язки рівняння Лакса $\varphi_t + K'^* \varphi = 0$, $\varphi \in T^*(M)$, що не обов"язково задовольняють умову симетричності Вольтери, тобто $\varphi' \neq \varphi'^*$ апріорі. У цьому випадку, виходячи із розширеного рівняння Лакса $\varphi_t + K'^* \varphi = 0 \Longrightarrow (\varphi' - \varphi'^*)K + \mathrm{grad}\,(\varphi, K) = 0$, знаходимо, що величина $\Omega = \varphi' - \varphi'^* : T^*(M) \to T(M)$ симплектична структура [1] на многовиді M / Ω - оператор вважається невиродженим/, відносно якої вихідна динамічна система $u_t = K[u]$, $u \in M$ є гамільтоновою, тобто $u_t = -\Omega^{-1} \mathrm{grad}\, H$, де $H = (\varphi, K) : M \to \mathbb{R}$ - відповідна функція Гамільтона. Тим самим встановлена

Теорема 2. Якщо рівняння Лакса $\varphi_t + K'^* \varphi = 0$ для однорідної гладкої динамічної системи $u_t = K[u]$ на многовиді M