УДК 517.95

С.П.Лавренюк

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ, ЩО СИЛЬНО ВИРОДЖУЄТЬСЯ

Розглянемо задачу

$$(p(x,t)u_t + c(x,t)u)_t + A(t)u = f(x,t),\ (x,t)\in Q_T; \qquad /1/$$

$$u(x,0)=0\ ,\ x\in D; \qquad /2/$$

$$u_t(x,0)=0\ ,\ x\in B; \qquad /3/$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \bar{n}^i}\right|_{S_T} = 0\ ,\ i=0,1,\dots,2m-1\ , \qquad /4/$$

де

$$A(t)u \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u) + b(x,t)u\ ,$$

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\ ,\ |\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n\ ,$$

$Q_T = D\times(0,T)$, $D\subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область,

$B = D\setminus\{x\in D : p(x,0)=0\}$, $S_T = \partial D\times(0,T)$.

Позначимо через $H_0^{2m,1}(Q_T)$ замикання множини нескінченно диференційованих функцій, які перетворюються в нуль в околі поверхні $\bar{D}\cup S_T$, за нормою

$$\|u\| = \left(\int_{Q_T}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2m}(D^{\alpha}u)^2 + u_t^2\Big)dxdt\right)^{1/2}.$$

Функцію $u(x,t)\in H_0^{2m,1}(Q_T)$ будемо називати узагальненим розв"язком задачі /1/–/4/, якщо вона задовольняє рівність

$$\int_{Q_T}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}uD^{\alpha}v - p(x,t)u_t v_t - c(x,t)uv_t +$$

$$+ b(x,t)uv - f(x,t)v\Big)dxdt = 0$$

для довільної $v(x,t)\in H^{2m,1}(Q_T)$ такої, що задовольняє умови /4/ і $v(x,T)=0$.

Зробимо такі припущення стосовно коефіцієнтів і правої частини рівняння /1/. Нехай

1. $p, p_t, c, a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta t}, b\in L^\infty(Q_T)$;

2. $p(x,t)\geq\varphi(t)$, $|b(x,t)|\leq\nu_2\varphi'(t)$,

$|p(x,t)|+|p_t(x,t)|+|c(x,t)|\leq\mu_0\varphi'(t), (x,t)\in Q_T$,

де $\varphi(t)$ – неперервно диференційована функція така, що $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ монотонно зростають, $t\in[0,T]$;

3. $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}, \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=2m}a_{\alpha\beta}(x,t)\eta_\alpha\eta_\beta\geq\nu_0\sum\limits_{|\alpha|=2m}\eta_\alpha^2$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m}a_{\alpha\beta t}(x,t)\eta_\alpha\eta_\beta\leq\nu_1\sum_{|\alpha|=2m}\eta_\alpha^2,\ (x,t)\in Q_T;$$

4. $f(x,t)\in L^2(Q_T)$, $S_T\in C^{4m}$.

Позначимо через

$$\varrho(\tau)=\max\left\{\sup_{Q_\tau}\frac{3p(x,t)\nu_1+p_t(x,t)\nu_0-2c(x,t)\nu_0}{\nu_0\varphi'(t)};0\right\},$$

$$\nu_3=\inf_{[0,T]}\varrho(t),\quad \nu_4=\max\{\nu_1;\nu_2\}.$$

Має місце

Теорема 1. Якщо виконуються умови 1–4 та існує $\delta_0>0$ таке, що справедлива нерівність

$$\nu_3+\nu_4\delta_0\leq 1,$$

то задача /1/–/4/ не може мати більш ніж один узагальнений розв"язок.

Твердження теореми одержується з енергетичної оцінки, яка може бути встановлена для узагальненого розв"язку задачі /1/–/4/.

Зробимо додаткове припущення:

5. $|c_t(x,t)|\leq\varrho_1(t)\varphi'(t)$, $(x,t)\in Q_T$,

де $\varrho_1(t)$ монотонно спадає на $(0,T]$.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. Якщо виконуються умови 1 – 5 і

$$\sup_{[0,T]}\int_D\frac{t^3\varrho_1^2(t)f^2(x,t)}{(\varphi(t))^{[\nu_3]+\varkappa+3}}dx<\infty,$$

де $[\nu_3]$ – ціла частина числа ν_3, $\varkappa = \max\{ +[\nu_5]-[\nu_3]; 0\}$,

$$\nu_5 = \inf_{[0,T]} \max\left\{ \sup_{Q_T} \frac{-p_t(x,t)-2c(x,t)}{\varphi'(t)}; 0 \right\},$$

то існує узагальнений розв"язок задачі /1/–/4/.

Для її доведення розглядаємо допоміжну задачу

$$(\rho^h(x,t)u_t + c^h(x,t)u)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^\alpha(a^h_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) +$$

$$+(-1)^m \varepsilon\varphi(t)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2m} u_t}{\partial x_i^{2m}} + b^h(x,t)u = f(x,t), \qquad /5/$$

$$(x,t) \in D\times(\varepsilon,T) = Q_{\varepsilon,T}, \quad 0<\varepsilon<T, \quad h>0,$$

$$u(x,\varepsilon)=0, \quad u_t(x,\varepsilon)=0,$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \bar{n}^i}\right|_{S_{\varepsilon,T}} = 0, \; i=0,\dots,2m-1.$$

Тут $p^h, c^h, a^h_{\alpha\beta}, b^h$ – усереднення відповідних коефіцієнтів рівняння /1/ по області Q_T. Оскільки рівняння /5/ параболічне за Петровським, то існує розв"язок $u^h_\varepsilon(x,t)$ допоміжної задачі в просторі $H^{4m,2}(Q_{\varepsilon,T})$ [1, с. 118] для довільних $\varepsilon>0$, $0<h<\varepsilon$. Залишається одержати оцінку функцій $u^h_\varepsilon(x,t)$ у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$, яка не залежить від h і ε. Після цього, використовуючи слабку компактність множини $\{u^h_\varepsilon(x;t)\}$, доводимо існування узагальненого розв"язку задачі /1/–/4/.

Зауважимо, що еволюційні рівняння, які вироджуються на площині задання початкових даних, розглядалися багатьма авторами [2 – 5].

1. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1965. Т.83. С.3–162. 2. Бубнов Б.А. Смешанная задача для одного класса ультрагиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Применение функционального анализа к уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1983. С.44–47. 3. Бубнов Б.А., Врагов В.Н. К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1982. 264. № 4. С.795–800. 4. Глазатов С.Н. О корректности смешанной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения с произвольным характером вырождения // Сибирский мат. журн. 1987. Т.28. № 2. С.60–66. 5. Барановский Ф.Т. О задаче Коши для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью // Укр. мат. журн. 1984. Т.36. № 3. С.275–282.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.90