517.956

П.Я.Пукач

ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Існує досить багато досліджень параболічних рівнянь з виродженням. Відзначимо тут лише праці, які безпосередньо стосуються теми [3, 4, 6, 7].

Нелінійні задачі тісно пов"язані з просторами інтегровних за Бохнером функцій [1, 2]. Ми використовуватимемо методи компактності та монотонності, детально розглянуті праці [5].

Нехай $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – обмежена область. Розглянемо циліндр $Q\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $Q=\Omega\times S$; $S=(0,T)$. У циліндрі Q розглядаємо слабо нелінійне параболічне рівняння виду

$$\varphi(t)u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}-b(x,t)|u|^{p-2}u+ \qquad /1/$$

$$+c(x,t)u=f(x,t),\ p>2.$$

Поставимо змішану задачу для рівняння /1/. Нехай $\Gamma=\partial\Omega\times S$ – бічна поверхня Q . Задамо початкову умову

$$u(x,0)=0. \qquad /2/$$

Крайова умова має вигляд

$$u(x,t)|_\Gamma=0. \qquad /3/$$

Щодо функції $\varphi(t)$ припускаємо таке:

$\varphi(0)=0$, $\varphi(t)$ строго монотонно зростає на S,

$$\varphi(t)\in C^\infty(S). \qquad /4/$$

Крім того, нехай

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\sigma_i\sigma_j\geq a\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2,\ a>0\ (a_{ij}=a_{ji}) \qquad /5/$$

для м.в. $(x,t)\in Q$ та довільного n – вимірного вектора $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$. Зробимо також припущення

$$\sup_Q|a_{ij_t}|\leq a',\ a'\geq 0,\ i,j=\overline{1,n}; \qquad /6/$$

$$-\infty<b\leq 0; \qquad /7/$$

$$+\infty > b_t \geqslant -b', \; b' > 0; \qquad /8/$$

$$-\infty < c \leqslant c_0 \leqslant 0; \qquad /9/$$

$$0 \leqslant c' \leqslant c_t < +\infty . \qquad /10/$$

Теорема I. Нехай поряд з /4/-/10/ $f\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \in L^2(Q)$.
Тоді:
а/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} < +\infty$, то існує розв"язок u задачі /I/-/3/, для якого

$$u \in L^\infty(S;V), \; V = \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \qquad /11/$$

$$\sqrt{\varphi}\, u_t \in L^2(S;L^2(\Omega)) = L^2(Q); \qquad /12/$$

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} = +\infty$, то існує розв"язок u задачі /I/, /3/, для якого виконуються включення /11/, /12/.

Зауваження. Розв"язок рівняння /I/ розуміємо в сенсі простору $D^*(S,V)$ [див.: 8].

Доведення проводимо методом компактності. Будуємо послідовність гальоркінських наближень $u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi_k(x)$, де $N \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x) \in V$, а $c_k^N(t)$ шукаємо як розв"язки певної задачі Коші для системи N звичайних диференціальних рівнянь. Далі одержуємо певні апріорні оцінки. Використовуючи ці оцінки і переходячи до границі при $N \to \infty$, робимо висно[illegible] про існування розв"язку задачі /I/-/3/ або /I/, /3/ /залежно від того, наскільки суттєво вироджується функція $\varphi(t)$ у початковий момент часу/.

Теорема 2. Якщо виконуються умови /4/, /5/, /7/, /9/ і $\int_0^T \frac{dt}{\varphi'(t)} < +\infty$, то:
а/ при виконанні умови $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} < +\infty$ задача /I/-/3/ має не більше одного розв"язку, що задовольняє включення /11/, /12/;
б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} = +\infty$, то задача /I/, /3/ має не більше одного розв"язку, що задовольняє включення /11/, /12/.

Розглянемо в циліндрі Q сильно нелінійне параболічне рівняння вигляду

$$\varphi(t)u_t + Au = f(x,t). \qquad /13/$$

Припущення щодо $\varphi(t)$ такі ж /див. /4//. Щодо оператора A припускаємо

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega_0(x, |\nabla u|^{p-1}) |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \omega_1(x)|u|^{p-2}u, \; p > 2 \qquad /14/$$

Нехай:

а/ при кожному $s \in [0,T]$ функція $x \to \omega_0(x,s)$ вимірна; /15/

б/ для м.в. $x \in \Omega$ функція $s \to \omega_0(x,s)$ неперервна. /16/

Крім того,

$\omega_i \leq M = const$ для всіх $s \in [0,T]$ та м.в. $x \in \Omega$

$(i = 0,1)$. /17/

Припускаємо також, що

$\forall x \in \Omega \; \forall s,t \in [0,T]$ функція $t \to \omega_0(x,t)\,t$ зростає, тобто

$$\omega_0(x,t)t - \omega_0(x,s)s \geq 0, \; t \geq s. \qquad /18/$$

Нехай для ω_i справедлива оцінка

$$\omega_i \geq m > 0 \quad (i = 0,1). \qquad /19/$$

З /14/-/19/ випливає [див.: 1], що A - хемінеперервний, монотонний, коерцитивний оператор.

Теорема 3. Нехай поряд з /4/, /14/-/19/ виконується умова

$\int_0^T \frac{\|f\|_{V^*}^q}{[\varphi(t)]^{1+\delta}} dt < +\infty, \delta = const > 0, V = W_0^{1,p}(\Omega)$. Тоді:

а/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{[\varphi(t)]^p} < +\infty$, то існує єдиний розв"язок задачі /13/, /2/, /3/, для якого:

$$u \in L^\infty(S; L^2(\Omega)) \cap L^p(S; V), \qquad /20/$$

$$\varphi(t)u_t \in L^q(S; V^*), \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \qquad /21/$$

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{[\varphi(t)]^p} = +\infty$, то існує єдиний розв"язок задачі /13/, /3/, для якого мають місце включення /20/, /21/.

Доведення проводиться методом Гальоркіна з використанням властивостей оператора A.

Розглянемо далі довільну обмежену нециліндричну область $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Позначимо $\Omega_\tau = Q \cap \{t = \tau\}$. Припускаємо, що бічна поверхня Γ області Q така, що допускає продовження через неї коефіцієнтів рівнянь /1/, /13/ зі збереженням диференціальних властивостей цих коефіцієнтів. Крім того, нехай $\Gamma \in C^1$, довільний перетин $(n+1)$ - вимірної поверхні Γ площиною $t = \tau$ є многовид розмірності n.

Мають місце такі теореми.

Теорема 4. Нехай область Q така, що $\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2}$, $t_1 < t_2$; Γ задовольняє вищевказані умови, і виконуються всі умови теореми 1. Тоді:

а/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} < +\infty$, то існує розв"язок задачі /I/-/3/ в Q, для якого:

$$u \in L^\infty(S; V_t),\ V_t = \overset{0}{H}{}^1(\Omega_t) \cap L^p(\Omega_t), \qquad /22/$$

$$\sqrt{\varphi}\, u_t \in L^2(S; L^2(\Omega_t)) = L^2(Q); \qquad /23/$$

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} = +\infty$, то існує розв"язок задачі /I/, /3/, в Q, для якого мають місце включення /22/, /23/.

Теорема 5. Якщо в Q виконуються всі умови теореми 2, то:

а/ при виконанні умови $\int_0^T \frac{dt}{\varphi'(t)} < +\infty$ задача /I/-/3/ має не більше одного розв"язку, який задовольняє включення /22/, /23/;

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi'(t)} = +\infty$, то задача /1/, /3/ має не більше одного розв"язку, який задовольняє включення /22/, /23/.

Теорема 6. Нехай у Q виконуються всі умови теореми 3; Γ - така поверхня, як описано вище. Тоді:

а/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{[\varphi(t)]^p} < +\infty$, то існує єдиний розв"язок задачі /13/, /2/, /3/, для якого:

$$u \in L^\infty(S; L^2(\Omega_t)) \cap L^p(S; V_t),\ V_t = W_0^{1,p}(\Omega_t), \qquad /24/$$

$$\varphi u_t \in L^q(S; V_t^*),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \qquad /25/$$

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{[\varphi(t)]^p} = +\infty$, то задача /13/, /3/ має єдиний розв"язок, який задовольняє включення /24/, /25/.

Доведення теорем 4 - 6 базується на методі регуляризації, запропонованому Ж.-Л.Ліонсом у праці [5].

1. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978. 2. Иосида К. Функциональный анализ. М., 1967. 3. Калашников А.С. Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка I // Вестн. МГУ. Сер. мат., механ. 1971. № 2. С.29-35. 4. Калашников А.С. Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка II // Вестн. МГУ. Сер. мат., механ. 1971. № 3. С.3-9.
2-2139

5. Л ж о н с Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1978. 6. М ы с о в с к и х П.И. Об обобщенных решениях некоторых вырождающихся уравнений параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1990. Т.26. № 3. С.468–478. 7. Carmela Vitanza. Sulla derivata frazionaria di ordine per le soluzioni dei sistemi parabolici degeneri di ordine superiore // Bol. Unione mat. ital.1986.T.B5.N4.P.197-208. 8. Schwartz L. Distributions à valeurs vectorielles. I, II // Ann. Inst. Fourier. 7(1957). P.1-141; 8(1958). P.1-209.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.90

УДК 517.946+511.2

І.О. Бобик

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь є взагалі некоректними, а у випадках коректності задачі її коректність нестійка стосовно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області. Крайові задачі з даними на всій границі /задачі типу Діріхле/ для деяких класів диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами розглядалися багатьма дослідниками [1 – 3]. Дана стаття розвиває та доповнює результати вказаних праць для випадку рівняння другого порядку, яке містить змішану похідну.

Надалі використаємо такі позначення:

Ω – одиничне коло, $D=\{(t,x): t\in[0,T], x\in\Omega\}$,

$H_q(\Omega)(q\in\mathbb{Z})$ – гільбертів простір 2π – періодичних комплекснозначних функцій $v(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{ikx}$ зі скалярним добутком

$$(v,w)_{H_q(\Omega)} = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[1+|k|^2]^q v_k\bar{w}_k ,$$

що індукує норму:

$$\|v(x)\|^2_{H_q(\Omega)} = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[1+|k|^2]^q|v_k|^2;$$

$H_q^n(D)$ $(q\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}_+)$ – гільбертів простір функцій $u(t,x)$ таких, що функція $\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}$ $(r=\overline{0,n})$ для кожного $t\in[0,T]$ належить простору $H_{q-r}(\Omega)$ і неперервна по t в нормі $H_{q-r}(\Omega)$; нор-