5. Л ж о н с Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1978. 6. М ы с о в с к и х П.И. Об обобщенных решениях некоторых вырождающихся уравнений параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1990. Т.26. № 3. С.468–478. 7. Carmela Vitanza. Sulla derivata frazionaria di ordine per le soluzioni dei sistemi parabolici degeneri di ordine superiore // Boll. Unione mat. ital. 1986. T. B5. № 4. P.197–208. 8. Schwartz L. Distributions á valeurs vectorielles. I, II // Ann. Inst. Fourier. 7(1957). P.1–141; 8(1958). P.1–209.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.90

УДК 517.946+511.2

І.О. Бобик

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь є взагалі некоректними, а у випадках коректності задачі її коректність нестійка стосовно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області. Крайові задачі з даними на всій границі /задачі типу Діріхле/ для деяких класів диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами розглядалися багатьма дослідниками [1 – 3]. Дана стаття розвиває та доповнює результати вказаних праць для випадку рівняння другого порядку, яке містить змішану похідну.

Надалі використаємо такі позначення:
Ω – одиничне коло, $D=\{(t,x): t\in[0,T], x\in\Omega\}$,
$H_q(\Omega)\,(q\in\mathbb{Z})$ – гільбертів простір 2π – періодичних комплекснозначних функцій $v(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{ikx}$ зі скалярним добутком

$$(v,w)_{H_q(\Omega)} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1+|k|^2]^q v_k \bar{w}_k ,$$

що індукує норму:

$$\|v(x)\|^2_{H_q(\Omega)} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1+|k|^2]^q |v_k|^2;$$

$H^n_q(D)\,(q\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}_+)$ – гільбертів простір функцій $u(t,x)$ таких, що функція $\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\,(r=\overline{0,n})$ для кожного $t\in[0,T]$ належить простору $H_{q-r}(\Omega)$ і неперервна по t в нормі $H_{q-r}(\Omega)$; норма в просторі $H_q^n(D)$ задається формулою

$$\|u(t,x)\|^2_{H_q^n(D)} = \int_0^T \sum_{r=0}^{n} \left\| \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r} \right\|_{H_{q-r}(\Omega)} dt.$$

2. В області D для рівняння

$$L[u] \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad /1/$$

де $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ розглянемо задачу з умовами

$$\begin{cases} l_1[u] \equiv u(0,x) + q_0 u_t(0,x) = \varphi(x), \\ l_2[u] \equiv u(T,x) + q_1 u_t(T,x) = \psi(x), \end{cases} \qquad /2/$$

де q_0, q_1 - дійсні числа, такі, що

$$q_1 - q_0 + T \neq 0. \qquad /3/$$

Припустимо, що оператор L - строго гіперболічний, тобто корені μ_1, μ_2 рівняння

$$a\mu^2 + b\mu + c = 0 \qquad /4/$$

дійсні та різні.

Вигляд області D накладає умови 2π - періодичності по x на функції $\varphi(x), \psi(x)$ та $u(t,x)$. Нехай

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx},\quad \psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{ikx}, \qquad /5/$$

де $\varphi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-ikx} dx,\quad \psi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x) e^{-ikx} dx.$

Розв"язок задачі /1/-/3/ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{ikx}. \qquad /6/$$

Підставляючи ряди /5/, /6/ у рівняння /1/ та умови /2/, бачимо, що для визначення кожної із функцій $u_k(t)$ отримаємо таку крайову задачу для звичайного диференціального рівняння:

$$a\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + b(ik)\frac{du_k(t)}{dt} + c(ik)^2 u_k(t) = 0; \qquad /7/$$

$$\begin{cases} U_1[u_k(t)] \equiv u_k(0) + q_0 u_k'(0) = \varphi_k, \\ U_2[u_k(t)] \equiv u_k(T) + q_1 u_k'(T) = \psi_k. \end{cases} \qquad /8/$$

3. Для кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ розв"язок задачі /7/, /8/ має вигляд

$$u_k(t) = C_k^{(1)} e^{ik\mu_1 t} + C_k^{(2)} e^{ik\mu_2 t} \qquad /9/$$

де коефіцієнти $C_k^{(1)}, C_k^{(2)}$ визначаються зі системи рівнянь

$$\begin{cases} C_k^{(1)} U_1[e^{ik\mu_1 t}] + C_k^{(2)} U_1[e^{ik\mu_2 t}] = \varphi_k, \\ C_k^{(1)} U_2[e^{ik\mu_1 t}] + C_k^{(2)} U_2[e^{ik\mu_2 t}] = \psi_k. \end{cases} \qquad /10/$$

Тому задача /7/, /8/ є однозначно розв"язною тоді і тільки тоді, коли $\Delta(k) \equiv \det \| U_p(e^{ik\mu_j t}) \|_{p,j=1,2} \neq 0$. Проводячи обчислення, знаходимо, що

$$\Delta(k) = e^{ik\mu_1 T}\{[(q_0 q_1 \mu_1 \mu_2 k^2 - 1)(1 - \cos(\mu_2 - \mu_1)kT) - (q_0\mu_1 + q_1\mu_2)k \cdot \sin(\mu_2 - \mu_1)kT] +$$
$$+ [(q_0\mu_1 + q_1\mu_2)k \cdot \cos(\mu_2 - \mu_1)kT - (q_0 q_1 \mu_1 \mu_2 k^2 - 1)\sin(\mu_2 - \mu_1)kT - (q_0\mu_2 + q_1\mu_1)k]i\}. \qquad /11/$$

Зауваження 1. Враховуючи умову /3/, легко показати, що при $k = 0$ завжди існує єдиний розв"язок $u_0(t) \in C^2([0,T])$ задачі /7/, /8/, який є многочленом першого степеня.

Теорема 1. Для єдиності розв"язку задачі /1/, /2/, /3/ в просторі $H_2^2(D)$ необхідно і достатньо, щоб для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ виконувалася хоча б одна з умов

$$(q_0 q_1 \mu_1 \mu_2 k^2 - 1)(1 - \cos(\mu_2 - \mu_1)kT) - (q_0\mu_1 + q_1\mu_2)k \sin(\mu_2 - \mu_1)kT \neq 0,$$
$$(q_0\mu_1 + q_1\mu_2)k \cdot \cos(\mu_2 - \mu_1)kT - (q_0 q_1 \mu_1 \mu_2 k^2 - 1)\sin(\mu_2 - \mu_1)kT - (q_0\mu_2 + q_1\mu_1)k \neq 0.$$

Доведення випливає з формули /11/ та з теореми про єдиність розвинення періодичної функції в ряд Фур"є.

Твердження 1. Для єдиності розв"язку задачі /1/, /2/, /3/ в просторі $H_2^2(D)$ достатньо, щоб $|q_0| \neq |q_1|$ і $\mu_1 \neq -\mu_2$.

Доведення. Представимо характеристичний визначник $\Delta(k)$ у вигляді

$$\Delta(k) = (1 + q_0\mu_1 ki)(1 + q_1\mu_2 ki) e^{ik\mu_2 T} - (1 - q_0\mu_2 ki)(1 + q_1\mu_1 ki) e^{ik\mu_1 T}. \qquad /11'/$$

При $|q_0| \neq |q_1|$ і $\mu_1 \neq -\mu_2$ модулі чисел $(1+q_0\mu_1 ki)(1+q_1\mu_2 ki)e^{ik\mu_2 T}$ та $(1+q_0\mu_2 ki)(1+q_1\mu_1 ki)e^{ik\mu_1 T}$ не рівні, а тому $\Delta(k) \neq 0$ $(\pm k = 1, 2, \ldots)$.

Твердження 2. Якщо $q_0 = q_1$, то для єдиності розв"язку задачі /1/–/3/ необхідно і достатньо, щоб число $\frac{(\mu_1 - \mu_2)T}{2\pi}$ було ірраціональним.

Доведення випливає з того, що при $q_0 = q_1$

$$\Delta(k) = (1 + q_0\mu_1 ki)(1 + q_0\mu_2 ki)(e^{ik\mu_2 T} - e^{ik\mu_1 T}).$$

4. Розглянемо існування розв"язку задачі /1/-/3/ в припущенні, що $\Delta(k)\neq 0$ $(k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$. На основі формул /6/, /9/, /10/ розв"язок розглядуваної задачі формально представляється у вигляді ряду

$$u(t,x)=u_0(t)+\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{\Delta_{21}(k)e^{ik\mu_2 t}+\Delta_{22}(k)e^{ik\mu_1 t}}{\Delta(k)}\varphi_k+\frac{\Delta_{11}(k)e^{ik\mu_2 t}+\Delta_{12}(k)e^{ik\mu_1 t}}{\Delta(k)}\psi_k\right]e^{ikx}, \qquad /12/$$

де $\Delta_{pj}(k)=(-1)^{p+j}U_p\left[e^{ik\mu_j t}\right]$ $(p,j=1,2)$.

Теорема 2. Нехай існують константи $M_1,M_2>0$ і $S_1,S_2\in\mathbb{R}$ такі, що для всіх /крім скінченного числа/ цілих $k\neq 0$ виконуються нерівності

$$\left|\frac{\Delta_{pj}(k)}{\Delta(k)}\right|\leq M_p|k|^{s_p} \quad (p,j=1,2) \qquad /13/$$

і нехай $\varphi(x)\in H_{q+s_2}(\Omega)$, $\psi(x)\in H_{q+s_1}(\Omega)$. Тоді існує розв"язок задачі /1/-/3/, який представляється рядом /13/ і належить простору $H_q^2(D)$. Цей розв"язок неперервно залежить від функцій $\varphi(x),\psi(x)$.

Доведення. З формули /12/ та нерівностей /13/ отримуємо оцінку

$$\|u(t,x)\|^2_{H_q^2(D)}\leq C_1\left(\|\varphi(x)\|^2_{H_{q+s_2}(\Omega)}+\|\psi(x)\|^2_{H_{q+s_1}(\Omega)}\right), \qquad /14/$$

де $C_1=C_1(\mu_1,\mu_2,T,q_0,q_1,M_1,M_2)$. З нерівності /14/ випливає доведення теореми.

Відзначимо, що при $q\geq 3$ знайдений розв"язок згідно з теоремою Соболева про вкладення просторів є класичним.

Виясним, в яких випадках виконуються оцінки /13/.

Твердження 3. Якщо $|q_0|\neq|q_1|$ і $\mu_1\neq-\mu_2$, то нерівності /13/ виконуються для всіх $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ при

1/ $S_1=1$, $S_2=1$, якщо $q_0\neq 0$, $q_1\neq 0$;
2/ $S_1=-1$, $S_2=0$, якщо $q_0=0$, $q_1\neq 0$;
3/ $S_1=0$, $S_2=-1$, якщо $q_0\neq 0$, $q_1=0$.

Доведення. З формули /11'/ при $|q_0|\neq|q_1|$ і $\mu_1\neq-\mu_2$ приходимо до наступної оцінки:

$$|\Delta(k)|\geq\frac{|\mu_1^2-\mu_2^2||q_0^2-q_1^2|\cdot|k|^2}{\sqrt{1+q_0^2\mu_1^2k^2}\sqrt{1+q_1^2\mu_2^2k^2}+\sqrt{1+q_0^2\mu_2^2k^2}\sqrt{1+q_1^2\mu_1^2k^2}}\geq\begin{cases}D_1, & q_0q_1\neq 0,\\ D_2|k|, & q_0q_1=0.\end{cases} \qquad /15/$$

Крім того,

$$|\Delta_{1j}(k)|\leq\begin{cases}G_j^{(1)}|k|, & \text{при } q_0\neq 0,\\ 1, & \text{при } q_0=0,\end{cases}\qquad |\Delta_{2j}(k)|\leq\begin{cases}G_j^{(2)}|k|, & \text{при } q_1\neq 0,\\ 1, & \text{при } q_1=0,\end{cases} \qquad /16/$$

де $D_1,D_2,G_j^{(1)},G_j^{(2)}$ – додатні константи, не залежні від k.

З нерівностей /15/, /16/ випливає доведення теореми.

Якщо нуль є коренем рівняння /4/ $(C=0)$, то у випадку 1/ оцінки /13/ виконуються при $S_1 = S_2 = 0$.

<u>Твердження 4.</u> Якщо $|q_0| = |q_1|$, то для майже всіх /у сенсі міри Лебега/ чисел $\alpha = \pi/T$ нерівності /13/ виконуються для всіх $\kappa \in \mathbb{Z}\,(|\kappa| > N(\alpha))$ при

1/ $S_i = 1+\varepsilon\,(0<\varepsilon<1;\, i=1,2)$ якщо $|q_0| = |q_1| \neq 0$ і $C \neq 0$,

2/ $S_i = 2+\varepsilon\,(0<\varepsilon<1;\, i=1,2)$, якщо $|q_0| = |q_1| = 0$ або $C=0$.

<u>Доведення.</u> Розглянемо випадок 1/. Позначимо

$$\xi_\kappa = \operatorname{arctg} \frac{(q_0\mu_1 + q_1\mu_2)\kappa}{1 - q_0 q_1 \mu_1\mu_2\kappa^2},$$

тоді, спираючись на нерівність $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}\,(x \in [0;\frac{\pi}{2}])$, з /11/ отримуємо:

$$|\Delta(\kappa)| \geqslant 2|1-q_0q_1\mu_1\mu_2\kappa^2|\left|\sin\frac{(\mu_2-\mu_1)\kappa T}{2}\right|\left|\cos\xi_\kappa \sin\frac{(\mu_2-\mu_1)\kappa T}{2} + \sin\xi_\kappa \cos\frac{(\mu_2-\mu_1)\kappa T}{2}\right| \geqslant$$

$$\geqslant 2|1-q_0q_1\mu_1\mu_2\kappa^2|\left|\sin\left(\frac{(\mu_2-\mu_1)\kappa T}{2} - n_\kappa\pi\right)\right|\left|\sin\left(\frac{(\mu_2-\mu_1)\kappa T}{2} + \xi_\kappa - m_\kappa\pi\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant 8\frac{T}{\pi}|1-q_0q_1\mu_1\mu_2\kappa^2|\left|\kappa\frac{(\mu_2-\mu_1)T}{2\pi} - n_\kappa\right|\left|\frac{(\mu_2-\mu_1)}{2} + \frac{\xi_\kappa}{T} - \frac{\pi}{T}\frac{m_\kappa}{\kappa}\right|, \qquad /17/$$

де n_κ, m_κ – цілі числа такі, що $\left|\kappa\frac{(\mu_2-\mu_1)T}{2\pi} - n_\kappa\right| \leqslant \frac{1}{2}$, $\left|\frac{(\mu_2-\mu_1)\kappa T}{2\pi} + \frac{\xi_\kappa}{\pi} - m_\kappa\right| \leqslant \frac{1}{2}$.

З нерівності /17/, теореми 2.1. і леми 2.4. праці [1, гл. 1] випливає, що для майже для /за Лебегом/ чисел $\alpha = \pi/T$ і всіх $\kappa \in \mathbb{Z}$ таких, що $|\kappa| > N(\alpha)$, виконуються нерівності

$$|\Delta(\kappa)| \geqslant \begin{cases} B_1|\kappa|^{-\varepsilon}, & q_0q_1\mu_1\mu_2 \neq 0 \\ B_2|\kappa|^{-2-\varepsilon}, & q_0q_1\mu_1\mu_2 = 0 \end{cases} \quad (0<\varepsilon<1;\, B_1, B_2 > 0). \qquad /18/$$

З оцінок /16/, /18/ випливає доведення твердження для випадку 1/. Для випадку 2/ доведення проводиться аналогічно.

<u>Твердження 5.</u> Якщо $\mu_1 = -\mu_2$, то для майже всіх /в сенсі міри Лебега/ чисел $\alpha = \pi/T$ при

1/ $S_i = 1+\varepsilon\ (i=1,2)$, якщо $q_0 \neq 0$ і $q_1 \neq 0$;

2/ $S_1 = 1+\varepsilon$; $S_2 = 2+\varepsilon$, якщо $q_0 = 0$ і $q_1 \neq 0$ $(0<\varepsilon<1)$,

3/ $S_1 = 2+\varepsilon$; $S_2 = 1+\varepsilon$, якщо $q_0 \neq 0$ і $q_1 = 0$.

Доведення проводиться аналогічно доведенню твердження 4.

<u>Зауваження 2.</u> Якщо $\mu_1 = -\mu_2$ і $q_0 = q_1 = 0$, то отримаємо задачу Діріхле для рівняння коливань струни, яку розглядали Буржин і Даффін [3].

1. П т а ш н и к Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 2. Ф и г о л ь В.В. Краевые задачи с данными на всей границе для дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического и составного типов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Донецк,1985. 3. Bourgin D.G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. Vol.45. N12. P. 851-858.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.90

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

У прямокутнику $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T\}$ розглянемо рівняння

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)u=f(x,t) \qquad /1/$$

з початковими

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\quad (0\leq x\leq l) \qquad /2/$$

і граничними умовами

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0\quad (0\leq t\leq T), \qquad /3/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t), f(x,t)$ – достатньо гладкі в D функції;
2/ $a(x,t)>0$ в D;
3/ $f(0,0)=f(l,0)=0$.

Добре відомо, що за цих припущень існує єдиний класичний розв"язок цієї задачі.

Користуючись методом примежового шару [1], одержуємо асимптотику розв"язку задачі /1/-/3/ до деякого порядку N, яку шукаємо у вигляді