1. П т а ш н и к Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 2. Ф и г о л ь В.В. Краевые задачи с данными на всей границе для дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического и составного типов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Донецк, 1985. 3. Bourgin D.G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. Vol 45. N12. P. 851-858.

Стаття надійшла до редколегії 26.0?.90

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

У прямокутнику $D=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ розглянемо рівняння

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)u = f(x,t) \qquad /1/$$

з початковими

$$u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \quad (0\le x\le l) \qquad /2/$$

і граничними умовами

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \quad (0\le t\le T), \qquad /3/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t)$, $f(x,t)$ – достатньо гладкі в D функції;
2/ $a(x,t)>0$ в D;
3/ $f(0,0)=f(l,0)=0$.

Добре відомо, що за цих припущень існує единий класичний розв"язок цієї задачі.

Користуючись методом примежового шару [1], одержуємо асимптотику розв"язку задачі /1/-/3/ до деякого порядку N, яку шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /4/$$

де $\tau = t/\varepsilon$.

Функції регулярної частини асимптотики визначаються як розв"язки задач:

$$-\frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial x^2}+a(x,t)\bar{u}_i=f_i(x,t); \qquad /5/$$

$$\bar{u}_i(0,t)=0,\ \bar{u}_i(l,t)=0, \qquad /6/$$

$$f_0(x,t)\equiv f(x,t),\ f_i(x,t)=-\frac{\partial\bar{u}_{i-1}}{\partial t}-\frac{\partial^2\bar{u}_{i-2}}{\partial t^2}\ (i=1,\dots,N),$$

де тут і далі вважається, що функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулеві.

Як бачимо, $\bar{u}_i(x,t)\,(i=0,\dots,N)$ визначаються рекурентно, як розв"язки граничних задач /5/, /6/ для звичайних диференціальних рівнянь / t – параметр/. Існування та єдиність розв"язку цих задач при наших припущеннях випливає з праці [3].

Функції типу примежового шару $\Pi_i(x,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ є розв"язками задач

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}+a(x,0)\Pi_i=\varphi_i(x,\tau); \qquad /7/$$

$$\Pi_i(0,\tau)=0,\ \Pi_i(l,\tau)=0; \qquad /8/$$

$$\Pi_i(x,0)=-\bar{u}_i(x,0),\ \frac{\partial\Pi_i(x,0)}{\partial\tau}=-\frac{\partial\bar{u}_{i-1}(x,0)}{\partial t}, \qquad /9/$$

де $\varphi_0(x,\tau)\equiv 0,\ \varphi_i(x,\tau)$ легко виписуються явним чином і залежать від $\Pi_j(x,\tau)(j<i)$.

Отже, $\Pi_i(x,\tau)(i=0,\dots,N)$ знаходяться рекурентно як розв"язки змішаних задач для гіперболічних рівнянь /7/-/9/. Легко безпосередньо перевірити виконання умов узгодженості до другого порядку в кутових точках /0,0/ і /l,0 / області D /використовується умова 3/ і, отже, існує єдиний класичний розв"язок цих задач.

Застосовуючи міркування, аналогічні наведеним у праці [5], доводимо оцінку

$$|\Pi_i(x,\tau)|\leq const\ e^{-\beta\tau}\ (i=0,\dots,N),$$

де константа $\beta > 0$. Звідси випливає, що функції $\Pi_i(x,\tau)(i=0,\dots,N)$ є функції типу примежового шару.

Застосовуючи метод інтегралів енергії [2], одержуємо

$$\| R_N \|_{L_2(D)} \leq C \varepsilon^{N+1/2}, \qquad /10/$$

де константа C не залежить від ε.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Припустимо, що в області D виконуються умови /1/-/3/. Тоді розв"язок задачі /1/-/3/ допускає асимптотичне зображення /4/, де $\bar{U}_i(x,t)(i=0,\dots,N)$ - розв"язки двоточкових задач /5/, /6/; функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)(i=0,\dots,N)$ - розв"язки задач /7/-/9/; залишковий член допускає оцінку /10/.

Зауваження. Результат роботи анонсовано у праці [4].

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122. 2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 4. Цымбал В.Н. Некоторые сингулярно возмущенные задачи для гиперболических уравнений // Успехи мат. наук. 1982. Т.37. № 4. С.102. 5. Muszyński I. Badania jakościowe rozwiązań niektórych równań typu hiperbolicznego // Zeszyty Naukowe Politech. Matematyka. 1967. T.13. S.1-68.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.90

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Асимптотику розв"язку задачі Коші для гіперболічного рівняння порядку $m+1$ /$m \geq 1$/, що вироджується у гіперболічне рівняння порядку m, одержав М.Г.Джавадов [3]. Аналогічна задача Коші для гіперболічного рівняння порядку $m+2$, що вироджується у гіперболічне рівняння порядку m, розглянута нами у статті [6], а також С.М.Маряняном у праці [4]. У вказаних вище працях початкові дані не залежали від малого параметру; разом з тим у цьому випадку при деяких припущеннях, як свідчать, наприклад, резуль-