де константа $\beta>0$. Звідси випливає, що функції $\Pi_i(x,\tau)(i=0,...,N)$ є функції типу примежового шару.

Застосовуючи метод інтегралів енергії [2], одержуємо

$$\|R_N\|_{L_2(D)} \leq C\varepsilon^{N+1/2}, \qquad /10/$$

де константа $C$ не залежить від $\varepsilon$.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Припустимо, що в області $D$ виконуються умови /1/-/3/. Тоді розв"язок задачі /1/-/3/ допускає асимптотичне зображення /4/, де $\bar{u}_i(x,t)(i=0,...,N)$ - розв"язки двоточкових задач /5/, /6/; функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)(i=0,...,N)$ - розв"язки задач /7/-/9/; залишковий член допускає оцінку /10/.

Зауваження. Результат роботи анонсовано у праці [4].

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122. 2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 4. Цымбал В.Н. Некоторые сингулярно возмущенные задачи для гиперболических уравнений // Успехи мат. наук. 1982. Т.37. № 4. С.102. 5. Muszyński I. Badania jakościowe rozwiązań niektórych równań typu hiperbolicznego // Zeszyty Naukowe Politech. Matematyka. 1967. T.13. S.1-68.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.90

УДК 517.946

В.М.Цимбал

# ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Асимптотику розв"язку задачі Коші для гіперболічного рівняння порядку $m+1$ /$m\geq 1$ /, що вироджується у гіперболічне рівняння порядку $m$, одержав М.Г.Джавадов [3]. Аналогічна задача Коші для гіперболічного рівняння порядку $m+2$, що вироджується у гіперболічне рівняння порядку $m$, розглянута нами у статті [6], а також С.М.Маряняном у праці [4]. У вказаних вище працях початкові дані не залежали від малого параметру; разом з тим у цьому випадку при деяких припущеннях, як свідчать, наприклад, результати [5, 7], асимптотика має деякі характерні риси. Побудові асимптотики розв"язків задачі Коші у вказаній ситуації і присвячена ця стаття.

Визначимо область $\Omega=\{(x_1,\dots,x_n)=(x_1,x'): 0\le x_1\le T, -\infty<x_i<+\infty\}$. Введемо лінійні $x_1$, строго гіперболічні оператори порядків $m$, $m+1$, $m+2$ [2]:

$$L_m\equiv\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha,\ L_{m+1}\equiv\sum_{|\beta|\le m+1}b_\beta(x)D^\beta,\ L_{m+2}\equiv\sum_{|\gamma|\le m-1}c_\gamma(x)D^\gamma,$$

де $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\dots D_n^{\alpha_n}$, $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=\overline{1,n})$.

Надалі будемо вважати виконаними такі умови:

1/ усі функції /коефіцієнти рівнянь, праві частини і початкові умови/ достатньо гладкі, порядок гладкості, очевидно, залежить від порядку асимптотики $N$, що будується нижче;

2/ коефіцієнти при старших похідних по $x_1$ операторів $L_m$, $L_{m+1}$, $L_{m+2}$ додатні;

3/ оператор $L_{m+1}$ розділяє оператор $L_{m+2}$ [2], а оператор $L_m$ розділяє оператор $L_{m+1}$.

1. В області $\Omega$ розглядається задача Коші

$$\varepsilon L_{m+1}u+L_m u=f(x), \qquad /1/$$

$$u\Big|_{x_1=0}=g_0(x'),\dots,\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x_1^{m-1}}\Big|_{x_1=0}=g_{m-1}(x'),\ \varepsilon\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\Big|_{x_1=0}=g_m(x'), \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Асимптотика будується методом примежового шару [1] у вигляді

$$u(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i u_i(x)+\varepsilon^{m-1}\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^i\Pi_i(\tau,x')+R_{N+1}(x,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\tau=x_1/\varepsilon$; перша сума в /3/ – регулярна частина асимптотики, $\Pi_i(\tau,x')$ $(i=0,\dots,N+1)$ – функції примежового шару, $R_{N+1}(x,\varepsilon)$ – залишковий член.

Задачі для визначення функцій регулярної частини асимптотики і функцій примежового шару одержують стандартним чином. Функції регулярної частини асимптотики є розв"язками задач Коші для гіперболічних рівнянь, функції примежового шару є розв"язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / $x'$ – параметр/. Функції одержують рекурентно в такій послідовності: $\Pi_0$, $u_0$, $\Pi_1$... і т.д. Це, як бачимо, є відмінністю порівняно з аналогічною задачею без параметра в граничних умовах. Як наслідок цього, вироджена задача – це задача Коші для рівняння /1/, якщо в ньому прийняти $\varepsilon = 0$, з початковими умовами, що відрізняються від перших $m$ умов /2/.

Залишковий член має оцінку, аналогічну оцінці залишкового члена праці [3].

2. В області $\Omega$ розглядається задача Коші

$$\varepsilon^2 L_{m+2}u + \varepsilon L_{m+1}u + L_m u = f(x); \qquad /4/$$

$$u\Big|_{x_1=0} = g_0(x'), \dots, \frac{\partial^{m-1}u}{\partial x_1^{m-1}}\Big|_{x_1=0} = g_{m-1}(x'), \ \varepsilon\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\Big|_{x_1=0} = g_m(x'), \ \varepsilon^2\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = g_{m+1}(x'). \qquad /5/$$

Асимптотика має вигляд

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x) + \varepsilon^{m-1}\sum_{i=0}^{N+2}\varepsilon^i \Pi_i(\tau, x') + R_{N+1}(x,\varepsilon), \qquad /6/$$

де, як і раніше, $v_i(x)$ – функції регулярної частини асимптотики, $\Pi_i(\tau, x')$ – функції примежового шару в околі $x_1 = 0$, $R_{N+1}(x,\varepsilon)$ – залишковий член.

Стандартне застосування методу примежового шару дає змогу виписати задачі для знаходження функцій регулярної частини асимптотики і функцій примежового шару. Що стосується відмінності /6/ від асимптотики відповідної задачі без малого параметру в початкових умовах [6, 4], то тут слід повторити те, що було сказано вище стосовно асимптотики /3/.

Залишковий член $R_{N+1}(x,\varepsilon)$ має оцінку, аналогічну оцінці праць [6, 4].

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122.
2. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961. 3. Джавадов М.Г. Задача Коши для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных // Изв. Ан АзССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1963. № 6. С.3-9.
4. Марнян С.М. Асимптотика решения задачи Коши для гиперболического уравнения, полиномиально зависящего от малого параметра. Баку, 1984. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2161-84 Деп. 5.
5. Флюд В.М., Цымбал В.Н. Сингулярно возмущенная задача

Коши с большой начальной скоростью для гиперболических систем // Методы малого параметра: Тез. докл. Всесоюз. науч. совещ. Нальчик, 1987. С.150. 6. Ц ы м б а л В.Н. Некоторые сингулярно возмущенные задачи для гиперболических уравнений // Успехи мат. наук. 1982. Т.37. № 4. С.102. 7. Ц ы м б а л В.Н. Задача сингулярно возмущенных уравнений математической физики с малым параметром в граничном условии // Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики: IX советско-чехословацкое совещ. Донецк, 1986. С.139.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.90

УДК 517.956

Г.М.Закопець

## УЗАГАЛЬНЕНІ ЗАДАЧІ РІК"Є ТА НЕЙМАНА ДЛЯ ІТЕРОВАНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Розглядаємо задачі Рік"є та Неймана для ітерованого рівняння Гельмгольца в октанті $\mathbb{R}^3_+$, коли задані граничні значення є узагальненими функціями. У класичній постановці задача Рік"є вивчалась у праці [3], а задача Неймана - у праці [4].

Нехай [1, 2] $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ - простір фінітних нескінченно-диференційованих функцій в $\mathbb{R}^3$; $S(\mathbb{R}^3)$ - простір функцій класу $C^\infty$, які при $|x|\to\infty$ спадають разом зі своїми похідними швидше від довільного степеня $|x|^{-1}$; $\mathcal{D}'(\Gamma_i)$ і $S'(\Gamma_i)$ - простори лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}(\Gamma_i)$ і $S(\Gamma_i)$ відповідно, де

$$\Gamma_i=\left\{X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ x_i=0,\, x_m\geq 0\ m\neq i,\ m,i=\overline{1,3}\right\}.$$

Дію узагальненої функції $F\in\mathcal{D}'(\Gamma_i)$ на основну $\varphi\in\mathcal{D}(\Gamma_i)$ позначимо $<F,\varphi>$.

<u>Постановка узагальненої задачі Рік"є.</u>
Нехай $F_i, G_i\in\mathcal{D}'(\Gamma_i)$, $i=\overline{1,3}$. Знайти розв"язок рівняння

$$(\Delta-c^2)^2 u(x)=0 \qquad /1/$$

в $\mathbb{R}^3_+=\left\{X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: x_i>0,\ i=\overline{1,3}\right\}$, який задовольняє умови:

$$\lim_{x_i\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^2} u(X)\varphi(X)dX^i=<F_i(X^i),\varphi(X^i)> \qquad /2/$$