Коши с большой начальной скоростью для гиперболических систем // Методы малого параметра: Тез. докл. Всесоюз. науч. совещ. Нальчик, 1987. С.150. 6. Ц ы м б а л В.Н. Некоторые сингулярно возмущенные задачи для гиперболических уравнений // Успехи мат. наук. 1982. Т.37. № 4. С.102. 7. Ц ы м б а л В.Н. Задача сингулярно возмущенных уравнений математической физики с малым параметром в граничном условии // Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики: IX советско-чехословацкое совещ. Донецк, 1986. С.139.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.90

УДК 517.956

Г.М.Закопець

УЗАГАЛЬНЕНІ ЗАДАЧІ РІК"Є ТА НЕЙМАНА ДЛЯ ІТЕРОВАНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Розглядаємо задачі Рік"є та Неймана для ітерованого рівняння Гельмгольца в октанті $\mathbb{R}^3_+$, коли задані граничні значення є узагальненими функціями. У класичній постановці задача Рік"є вивчалась у праці [3], а задача Неймана - у праці [4].

Нехай [1, 2] $D(\mathbb{R}^3)$ - простір фінітних нескінченно-диференційованих функцій в $\mathbb{R}^3$; $S(\mathbb{R}^3)$ - простір функцій класу C^∞, які при $|x| \to \infty$ спадають разом зі своїми похідними швидше від довільного степеня $|x|^{-1}$; $D'(\Gamma_i)$ і $S'(\Gamma_i)$ - простори лінійних неперервних функціоналів на $D(\Gamma_i)$ і $S(\Gamma_i)$ відповідно, де

$$\Gamma_i = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_i = 0,\ x_m \geq 0 \ \ m \neq i,\ m, i = \overline{1,3} \right\}.$$

Дію узагальненої функції $F \in D'(\Gamma_i)$ на основну $\varphi \in D(\Gamma_i)$ позначимо $< F, \varphi >$.

<u>Постановка узагальненої задачі Рік"є.</u>
Нехай $F_i, G_i \in D'(\Gamma_i)$, $i = \overline{1,3}$. Знайти розв"язок рівняння

$$(\Delta - c^2)^2 u(x) = 0 \qquad /1/$$

в $\mathbb{R}^3_+ = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i > 0,\ i = \overline{1,3} \right\}$, який задовольняє умови:

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} u(X)\varphi(X)dX^i = < F_i(X^i), \varphi(X^i) > \qquad /2/$$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2}\Delta u(X)\varphi(X)\,dX^i = \langle G_i(X^i),\ \varphi(X^i)\rangle$$
$$\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3),\ i=\overline{1,3}, \qquad /3/$$

де c – додатна константа; Δ – оператор Лапласа; $X^i = X|_{x_i=0}$.

У праці [3] побудована функція Гріна $G(X,Y)$ класичної задачі Рік"є для рівняння /1/, яка має такий вигляд:

$$G(X,Y)=\sum_{j=1}^{8}(-1)^{j+1}e^{-cr_j}, \qquad /4/$$

де $r_j=|X_jY|=\left[\sum_{i=1}^{3}(y_i-x_{ji})^2\right]^{1/2}$, $j=\overline{1,8}$;

$Y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3_+$, $X=X_1=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3_+$, $X_2=(-x_1,x_2,x_3)$,

$X_3=(-x_1,-x_2,x_3)$, $X_4=(x_1,-x_2,x_3)$, $X_5=(x_1,-x_2,-x_3)$,

$X_6=(-x_1,-x_2,-x_3)$, $X_7=(-x_1,x_2,-x_3)$, $X_8=(x_1,x_2,-x_3)$.

Легко переконатися, що

$$D_{y_i}G(X,Y)|_{y_i=0}=2cx_i\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}e^{-cR_{ki}}\cdot R_{ki}^{-1}; \qquad /5/$$

$$D_{y_i}\Delta G(X,Y)|_{y_i=0}=2cx_i\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}e^{-cR_{ki}}\left[\frac{c^2}{R_{ki}}-\frac{2c}{R_{ki}^2}-\frac{2}{R_{ki}^3}\right], \qquad /6/$$

де $R_{ji}=r_j$ для $y_i=0$, $j=\overline{1,8}$, $i=\overline{1,3}$,
$k=2j-1$ для $i=1$, $k=j+2$ для $i=2$, $k=j$ для $i=3$.

Справедлива така лема.

Лема 1. Нехай

$$p_i(X,Y^i)=A\left[2c^2D_{y_i}G(X,Y)-D_{y_i}\Delta_y G(X,Y)\right]|_{y_i=0}$$
$$q_i(X,Y^i)=AD_{y_i}G(X,Y)|_{y_i=0},\ A=(8\pi c)^{-1},\ i=\overline{1,3}. \qquad /7/$$

Тоді

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2}p_m(X,Y^m)\varphi(X)\,dX^i=\begin{cases}\varphi(Y^i), & m=i\\ 0, & m\neq i\end{cases}; \qquad /8/$$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2}q_m(X,Y^m)\varphi(X)\,dX^i=0; \qquad /9/$$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2}\Delta p_m(X,Y^m)\varphi(X)\,dX^i=0; \qquad /10/$$

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta\, q_m(X,Y^m)\,\varphi(X)\,dX^i = \begin{cases} \varphi(Y^i), & m=i \\ 0, & m \neq i, \end{cases} \qquad /11/$$

$$\forall \varphi(X) \in D(\mathbb{R}^3),\ i=\overline{1,3}.$$

При доведенні леми використані властивості функції Гріна /4/ та її похідних [3].

Теорема 1. Нехай $F_i, G_i \in S'(\Gamma_i)$, $i=\overline{1,3}$. Тоді функція $u(X)=\sum_{i=1}^{3}[u_i(X)+\bar{u}_i(X)]$, $X \in \mathbb{R}^3_+$, /12/

де $u_i(X)=\langle F_i(Y^i),\ p_i(X,Y^i)\rangle$

$$\bar{u}_i(X)=\langle G_i(Y^i),\ q_i(X,Y^i)\rangle, \quad i=\overline{1,3} \qquad /13/$$

є розв"язком задачі /1/-/3/ і $u(X) \to 0$ при $|X| \to +\infty$.

Доведення. Оскільки $(\Delta_X - c^2)^2 G(X,Y)=0$, $X \in \mathbb{R}^3_+$, то $(\Delta_X - c^2)^2 u_i(X)=\langle F_i(Y^i),\ (\Delta_X - c^2)^2 p_i(X,Y^i)\rangle =$

$$=\langle F_i(Y^i),\ A\,[2c^2 D_{y_i}((\Delta_X - c^2)^2 G(X,Y)) -$$

$$- D_{y_i}\Delta_Y((\Delta_X - c^2)^2 G(X,Y))]\big|_{y_i=0}\rangle = 0.$$

Аналогічно $(\Delta_X - c^2)^2 \bar{u}_i(X)=0$, тому $(\Delta_X - c^2)^2 u(X)=0$, тобто функція $u(X)$, визначена формулою /12/-/13/, є розв"язком рівняння /1/.

Виконання умов /2/, /3/ перевіримо, використовуючи неперервність функціоналів F_i, G_i, $i=\overline{1,3}$, аналог теореми Фубіні та формули /9/ і /10/ леми 1

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} u(X)\varphi(X)\,dX^i = \lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \Big[\sum_{m=1}^{3}(u_m(X)+\bar{u}_m(X))\Big]\varphi(X)\,dX^i =$$

$$=\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{m=1}^{3} \langle F_m(Y^m),\ p_m(X,Y^m)\rangle\,\varphi(X)\,dX^i +$$

$$+\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{m=1}^{3} \langle G_m(Y^m),\ q_m(X,Y^m)\rangle\,\varphi(X)\,dX^i =$$

$$=\langle F_i(Y^i),\ \lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} p_i(X,Y^i)\varphi(X)\,dX^i\rangle +$$

$$+\sum_{i \neq m=1}^{3} \langle F_m(Y^m),\ \lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} p_m(X,Y^m)\varphi(X)\,dX^i\rangle +$$

$$+\sum_{m=1}^{3} < G_m(y^m),\ \lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} q_m(X,y^m)\varphi(X)dX^i > =$$

$$= < F_i(y^i), \varphi(y^i) >,\quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3),\ i=\overline{1,3}.$$

Аналогічно з формул /10/ і /11/ отримуємо

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2}\Delta u(X)\varphi(X)dX^i = < G_i(y^i), \varphi(y^i) >,\quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3),\ i=\overline{1,3}.$$

З формул /12/, /13/, /17/, враховуючи поведінку функції $G(X,y)$ і її похідних /5/, /6/, при $|X|\to\infty$ одержуємо, що $u(X)\to 0$ при $|X|\to\infty$.

Теорема доведена.

Постановка узагальненої задачі Неймана.

Нехай $R_i, L_i \in D'(\Gamma_i)$, $i=\overline{1,3}$. Знайти розв"язок рівняння /1/, який задовольняє умови

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{x_i} u(X)\varphi(X)\,dX^i = < R_i(X^i), \varphi(X^i) >; \qquad /14/$$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{x_i}\Delta u(X)\varphi(X)dX^i = < L_i(X^i), \varphi(X^i) >, \qquad /15/$$

$$\forall\varphi(X)\in D(\mathbb{R}^3),\ i=\overline{1,3}.$$

За такою ж схемою, як і функція $G(X,y)$, визначена формулою /4/, будується функція Гріна $G_1(X,y)$ класичної задачі Неймана для рівняння /1/, яка має вигляд

$$G_1(X,y) = \sum_{j=1}^{8} e^{-cr_j}. \qquad /16/$$

Справедливі такі твердження.

Лема 2. Нехай

$$v_i(X,y^i) = A\left[\Delta_y G_1(X,y) - 2c^2 G_1(X,y)\right]\Big|_{y_i=0};$$

$$\omega_i(X,y^i) = AG_1(X,y)\Big|_{y_i=0},\quad i=\overline{1,3}.$$

Тоді $\lim\limits_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{y_m} v_m(X,y^m)\varphi(X)dX^i = \begin{cases}\varphi(y^i), & m=i\\ 0, & m\neq i\end{cases};$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{y_m}\omega_m(X,y^m)\varphi(X)dX^i = 0;$$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{y_m}\Delta v_m(X,y^m)\varphi(X)dX^i = 0;$$

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} D_{y_m} \Delta w_m(X, y^m) \varphi(X) dX^i = \begin{cases} \varphi(y^i), & m = i \\ 0, & m \neq i; \end{cases}$$

$$\forall \varphi(X) \in D(\mathbb{R}^3), \ m, i = \overline{1,3}.$$

<u>Теорема 2.</u> Нехай $R_i, L_i \in S'(\Gamma_i)$, $i = \overline{1,3}$. Тоді функція $u(X) = \sum_{i=1}^{3} [u_i(X) + \bar{u}_i(X)]$, $X \in \mathbb{R}^3_+$, де

$$u_i(X) = \langle R_i(y^i), v_i(X, y^i) \rangle,$$

$$\bar{u}_i(X) = \langle L_i(y^i), w_i(X, y^i) \rangle, \quad i = \overline{1,3}$$

є розв"язком задачі /1/, /14/, /15/ і $u(X) \to 0$ при $|X| \to \infty$.

Доведення цих тверджень проводиться за такою ж схемою, як і доведення леми 1 та теореми 1.

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1988. 2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М., 1965. 3. Golab J. On the Riquer problem for the iterated Helmholtz equation in octant E_3^+ // Zeszyty Naukowe AGH. 1985. N 1001. S. 105-113. 4. Golab J. Problem brzegowy Neumanna dla iterowanego równania Helmholtza // Zeszyty Naukowe AGH. 1980. N 764. S. 31-44.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90

УДК 517.956

В.Г.Костенко, Л.О.Губаль

ЗАДАЧА КОШІ ТА ОДНА ОБЕРНЕНА КОЕФІЦІЄНТНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Тут досліджено задачу про знаходження функцій $u_1(x,t), u_2(x,t), \alpha_1(t), \beta_2(t)$ з умов:

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + l_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + k_1 u_1 + k_2 u_2 + f_1(x,t), \qquad /1/$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + l_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_1 u_1 + m_2 u_2 + f_2(x,t), \ 0 < x < h, \ t > -\infty;$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha_1(t) u_1 + \alpha_2(t) u_2) \right|_{x=0} = \mu_1(t), \qquad /2/$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta_1(t) u_1 + \beta_2(t) u_2) \right|_{x=0} = \mu_2(t), \ t > -\infty;$$