

$$\lim_{x_i \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^2} D_{y^m} \Delta w_m(x, y^m) \varphi(x) dx = \begin{cases} \varphi(y^i), & m=i \\ 0, & m \neq i \end{cases};$$

$$\forall \varphi(x) \in D(\mathbb{R}^3), m, i = \overline{1, 3}.$$

Теорема 2. Нехай $R_i, L_i \in S'(\Gamma_i)$, $i = \overline{1, 3}$. Тоді функція $u(x) = \sum_{i=1}^3 [u_i(x) + \bar{u}_i(x)]$, $x \in \mathbb{R}_+^3$, де

$$u_i(x) = \langle R_i(y^i), v_i(x, y^i) \rangle,$$

$$\bar{u}_i(x) = \langle L_i(y^i), w_i(x, y^i) \rangle, i = \overline{1, 3}$$

є розв'язком задачі /1/, /14/, /15/ і $u(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Доведення цих тверджень проводиться за такою ж схемою, як і доведення леми 1 та теореми 1.

1. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. М., 1988. 2. Ш и л о в Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М., 1965. 3. Golab J. On the Riquier problem for the iterated Helmholtz equation in octant E_+^3 // zeszyty Naukowe AGH. 1985. N 4001. S. 105-113. 4. Golab J. Problem brzegowy Neumanna dla iterowanego równania Helmholtza // zeszyty Naukowe AGH. 1980. N 764. S. 31-44.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90

УДК 517.956

В.Г.Костенко, Л.О.Губаль

ЗАДАЧА КОШИ ТА ОДНА ОБЕРНЕНА КОЕФІЦІЄНТНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Тут досліджено задачу про знаходження функцій $u_1(x, t), u_2(x, t)$, $\alpha_1(t), \beta_2(t)$ з умов:

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + l_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + f_1(x, t), \quad /1/$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + l_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_1 u_1 + m_2 u_2 + f_2(x, t), \quad 0 < x < h, t > -\infty;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha_1(t) u_1 + \alpha_2(t) u_2 \Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad /2/$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta_1(t) u_1 + \beta_2(t) u_2 \Big|_{x=0} = \mu_2(t), \quad t > -\infty;$$

© Костенко В.Г., Губаль Л.О., 1991

$$u_1(x,t)|_{x=h} = v_1(t), \quad u_2(x,t)|_{x=h} = v_2(t), \quad t \rightarrow -\infty; \quad /3/$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=h} = y_1(t), \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=h} = y_2(t), \quad t \rightarrow -\infty. \quad /4/$$

При цьому a_i, l_i, κ_i, m_i / $i=1,2$ / припускаємо відомими сталими, а функції $\beta_i(t), \alpha_2(t), \mu_i(t), v_i(t), y_i(t), f_i(x,t)$ ($i=1,2$) аналітичними за змінною t і неперервними за x . Зауважимо, що система рівнянь теплового переносу зводиться заміною змінних до системи виду /5/.

Функції $u_1(x,t), u_2(x,t)$ знаходимо, розв'язуючи задачу Коші /1/, /3/, /4/ символьним методом.

Після дворазового застосування інтегрального оператора

$$J_z = \int_h^x z(d,t) d\alpha \quad /5/$$

до задачі /1/, /3/, /4/ одержуємо еквівалентну останній системі інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} (1 + \kappa_1 J^2 + l_1 J - \frac{B_1 J}{a_1}) u_1 + \kappa_2 J^2 u_2 &= v_1(t) + J(y_1(t) + l_1 v_1(t)) - J^2 f_1(x,t), \\ (1 + m_2 J^2 + l_2 J - \frac{B_1 J}{a_2}) u_2 + m_1 J^2 u_1 &= v_2(t) + J(y_2(t) + l_2 v_2(t)) - J^2 f_2(x,t), \end{aligned} \quad /6/$$

$$\text{де } B_1 z = J \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} J z.$$

Замінюючи в /6/ оператори B_1, J відповідно параметрами λ_1, λ_2 , перетворюємо тим самим /6/ у систему алгебраїчних рівнянь для нових невідомих функцій $\bar{u}_1(x,t,\lambda_1,\lambda_2), \bar{u}_2(x,t,\lambda_1,\lambda_2)$:

$$\begin{aligned} (1 + \kappa_1 \lambda_2^2 + l_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a_1}) \bar{u}_1 + \kappa_2 \lambda_2^2 \bar{u}_2 &= v_1(t) + \lambda_2 (y_1(t) + l_1 v_1(t)) - \lambda_2^2 f_1(x,t), \\ m_1 \lambda_2^2 \bar{u}_1 + (1 + m_2 \lambda_2^2 + l_2 \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a_2}) \bar{u}_2 &= v_2(t) + \lambda_2 (y_2(t) + l_2 v_2(t)) - \lambda_2^2 f_2(x,t). \end{aligned}$$

Остання система рівнянь має єдиний розв'язок для усіх достатньо малих за модулем λ_1, λ_2 . При цьому він може бути зображений у вигляді

$$\bar{u}_1(x,t,\lambda_1,\lambda_2) = \bar{u}_{11}(t,\lambda_1,\lambda_2) + \bar{u}_{12}(x,t,\lambda_1,\lambda_2),$$

$$\bar{u}_2(x,t,\lambda_1,\lambda_2) = \bar{u}_{21}(t,\lambda_1,\lambda_2) + \bar{u}_{22}(x,t,\lambda_1,\lambda_2), \quad /8/$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{11}(t,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{(1 + m_2 \lambda_2^2 + l_2 \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a_2}) [v_1(t) + \lambda_2 (y_1(t) + l_1 v_1(t))] - \kappa_2 \lambda_2^2 [v_2(t) + \lambda_2 (y_2(t) + l_2 v_2(t))]}{\Delta}, \\ \bar{u}_{21}(t,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{(1 + \kappa_1 \lambda_2^2 + l_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a_1}) [v_2(t) + \lambda_2 (y_2(t) + l_2 v_2(t))] - m_1 \lambda_2^2 [v_1(t) + \lambda_2 (y_1(t) + l_1 v_1(t))]}{\Delta}, \\ \bar{u}_{12}(x,t,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{\lambda_2^2 [\kappa_2 \lambda_2^2 f_2(x,t) - (1 + m_2 \lambda_2^2 + l_2 \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a_2}) f_1(x,t)]}{\Delta}, \end{aligned}$$

$$\bar{u}_{22}(x, t, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2^2 [m_1 \lambda_2^2 f_1(x, t) - (1 + \kappa_1 \lambda_2^2 + l_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a_2}) f_2(x, t)]}{\Delta}, \quad /9/$$

$$\Delta = 1 - \lambda_2 \left\{ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a_1 a_2} (a + b \lambda_2^2 + \alpha \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2) - (1 + \beta \lambda_2 + \gamma \lambda_2^2 + \delta \lambda_2^3) \right\},$$

$$a = a_1 + a_2, \quad b = \kappa_1 a_1 + m_2 a_2, \quad \alpha = a_1 l_1 + a_2 l_2, \quad l = l_1 + l_2, \quad \beta = \kappa_1 + m_2 + l_1 l_2,$$

$$\gamma = \kappa_1 l_2 + m_2 l_1, \quad \delta = \kappa_1 m_2 - m_1 \kappa_2.$$

Крім того, за достатньо малих за модулем λ_1, λ_2

$$\frac{1}{\Delta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{\kappa=0}^{n-i-j} \sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa} \sum_{m=0}^{n-i-j-\kappa-s} \sum_{r=0}^{n-i-j-\kappa-s-m} \sum_{p=0}^{n-i-j-\kappa-s-m-r} (-1)^{i+j} C_n^i C_{n-i}^j C_{n-i-j}^{\kappa} C_{n-i-j-\kappa}^s C_i^m C_{i-m}^r C_{i-m-r}^p \times$$

$$\times \frac{a^{n-i-j-\kappa-s} b^{\kappa} \alpha^s l^{i-m-r-p} \delta^m \gamma^r \beta^p}{(a_1 a_2)^{n-i}} \lambda_1^{n-i-j} \lambda_2^{n-i-j+2\kappa+s+3m+2r+p}. \quad /10/$$

Користуючись /8/, /9/, розв'язок задачі /1/, /3/, /4/ зображуємо формулами обернення виду

$$u_1(x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \int_{\Gamma_2} \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \left\{ \bar{u}_{11}(t + \frac{x-h}{\lambda_1}, \lambda_1, \lambda_2) + \frac{1}{\lambda_2} \int_h^x e^{\frac{\tau-h}{\lambda_2}} \bar{u}_{11}(t + \frac{x-\tau_1}{\lambda_1}, \lambda_1, \lambda_2) d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_2^2} \int_h^x d\tau_1 \int_h^{\tau_1} e^{\frac{\tau_1-\tau_0}{\lambda_2}} \bar{u}_{12}(\tau_0, t + \frac{x-\tau_1}{\lambda_1}, \lambda_1, \lambda_2) d\tau_0 \right\} = u_{11}(x, t) + u_{12}(x, t),$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \int_{\Gamma_2} \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \left\{ \bar{u}_{21}(t + \frac{x-h}{\lambda_1}, \lambda_1, \lambda_2) + \frac{1}{\lambda_2} \int_h^x e^{\frac{\tau_1-h}{\lambda_2}} \bar{u}_{21}(t + \frac{x-\tau_1}{\lambda_1}, \lambda_1, \lambda_2) d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_2^2} \int_h^x d\tau_1 \int_h^{\tau_1} e^{\frac{\tau_1-\tau_0}{\lambda_2}} \bar{u}_{22}(\tau_0, t + \frac{x-\tau_1}{\lambda_1}, \lambda_1, \lambda_2) d\tau_0 \right\} = u_{21}(x, t) + u_{22}(x, t). \quad /11/$$

Після розкладу в ряди підінтегральних функцій в /11/, застосування теорії лишків і введення позначень $2n-i+2j+2\kappa+s+3m+2r+p = \theta, n-i+j = \sigma$ одержуємо

$$u_{11}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{\kappa=0}^{n-i-j} \sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa} \sum_{m=0}^{n-i-j-\kappa-s} \sum_{r=0}^{n-i-j-\kappa-s-m} \sum_{p=0}^{n-i-j-\kappa-s-m-r} (-1)^{i+j} C_n^i C_{n-i}^j C_{n-i-j}^{\kappa} C_{n-i-j-\kappa}^s C_i^m C_{i-m}^r C_{i-m-r}^p \times$$

$$\times \frac{a^{n-i-j-\kappa-s} b^{\kappa} \alpha^s l^{i-m-r-p} \delta^m \gamma^r \beta^p}{(a_1 a_2)^{n-i}} \left\{ \nu_1^{(\sigma)}(t) \frac{(x-h)^{\theta}}{\theta!} + [(l_1 + l_2) \nu_1^{(\sigma)}(t) + \gamma_1^{(\sigma)}(t)] \frac{(x-h)^{\theta+1}}{(\theta+1)!} + \right.$$

$$\left. + [(m_2 + l_1 l_2) \nu_1^{(\sigma)}(t) + l_2 \gamma_1^{(\sigma)}(t) - \kappa_2 \nu_2^{(\sigma)}(t) - \frac{1}{a_2} \gamma_1^{(\sigma+1)}(t)] \frac{(x-h)^{\theta+2}}{(\theta+2)!} + \right.$$

$$\left. + [m_2 \gamma_1^{(\sigma)}(t) - \kappa_2 \gamma_2^{(\sigma)}(t) + m_2 l_1 \nu_1^{(\sigma)}(t) - \kappa_2 l_2 \nu_2^{(\sigma)}(t) - \frac{1}{a_2} (\gamma_1^{(\sigma+1)}(t) + l_1 \nu_1^{(\sigma+1)}(t))] \frac{(x-h)^{\theta+3}}{(\theta+3)!} \right\},$$

$$\begin{aligned}
u_{12}(x,t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{\kappa=0}^{n-i-j} \sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa} \sum_{m=0}^{n-i-j-\kappa-s} \sum_{r=0}^{i-m} \sum_{p=0}^{i-m-r} (-1)^{i+j+\kappa} C_n^i C_{n-i}^j C_{n-i-j}^{\kappa} C_{n-i-j-\kappa}^s C_i^m C_{i-m}^r C_{i-m-r}^p \times \\
& \times \frac{a^{n-i-j-\kappa-s} \delta^{\kappa} \alpha^s l^{i-m-r-p} \delta^m \gamma^r \beta^p}{(a_1 a_2)^{n-i}} \left\{ \int_h^x \frac{(x-\tau_0)^{\theta+1}}{(\theta+1)!} f_1^{(0, \delta)}(\tau_0, t) d\tau_0 + \right. \\
& \left. + l_2 \int_h^x \frac{(x-\tau_0)^{\theta+2}}{(\theta+2)!} f_1^{(0, \delta)}(\tau_0, t) d\tau_0 + \int_h^x \frac{(x-\tau_0)^{\theta+3}}{(\theta+3)!} \left[m_2 f_1^{(0, \delta)}(\tau_0, t) - \kappa_2 f_2^{(0, \delta)}(\tau_0, t) - \frac{1}{a_2} f_1^{(0, \delta+1)}(\tau_0, t) \right] d\tau_0 \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{21}(x,t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{\kappa=0}^{n-i-j} \sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa} \sum_{m=0}^{n-i-j-\kappa-s} \sum_{r=0}^{i-m} \sum_{p=0}^{i-m-r} (-1)^{i+j+\kappa} C_n^i C_{n-i}^j C_{n-i-j}^{\kappa} C_{n-i-j-\kappa}^s C_i^m C_{i-m}^r C_{i-m-r}^p \times \\
& \times \frac{a^{n-i-j-\kappa-s} \delta^{\kappa} \alpha^s l^{i-m-r-p} \delta^m \gamma^r \beta^p}{(a_1 a_2)^{n-i}} \left\{ \nu_2^{(0)}(t) \frac{(x-h)^{\theta}}{\theta!} + [(l_1 + l_2) \nu_2^{(0)}(t) + \gamma_2^{(0)}(t)] \frac{(x-h)^{\theta+1}}{(\theta+1)!} + \right. \\
& + [(\kappa_1 + l_1 l_2) \nu_2^{(0)}(t) + l_1 \gamma_2^{(0)}(t) - m_1 \nu_1^{(0)}(t) - \frac{1}{a_1} \nu_2^{(0+1)}(t)] \frac{(x-h)^{\theta+2}}{(\theta+2)!} + \\
& \left. + [\kappa_1 \gamma_2^{(0)}(t) - m_1 \gamma_1^{(0)}(t) + \kappa_1 l_2 \nu_2^{(0)}(t) - m_1 l_1 \nu_1^{(0)}(t) - \frac{1}{a_1} (\gamma_2^{(0+1)}(t) + l_2 \nu_2^{(0+1)}(t))] \frac{(x-h)^{\theta+3}}{(\theta+3)!} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{22}(x,t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{\kappa=0}^{n-i-j} \sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa} \sum_{m=0}^{n-i-j-\kappa-s} \sum_{r=0}^{i-m} \sum_{p=0}^{i-m-r} (-1)^{i+j+\kappa} C_n^i C_{n-i}^j C_{n-i-j}^{\kappa} C_{n-i-j-\kappa}^s C_i^m C_{i-m}^r C_{i-m-r}^p \times \\
& \times \frac{a^{n-i-j-\kappa-s} \delta^{\kappa} \alpha^s l^{i-m-r-p} \delta^m \gamma^r \beta^p}{(a_1 a_2)^{n-i}} \left\{ \int_h^x \frac{(x-\tau_0)^{\theta+1}}{(\theta+1)!} f_2^{(0, \delta)}(\tau_0, t) d\tau_0 + \right. \\
& \left. + l_1 \int_h^x \frac{(x-\tau_0)^{\theta+2}}{(\theta+2)!} f_2^{(0, \delta)}(\tau_0, t) d\tau_0 + \int_h^x \frac{(x-\tau_0)^{\theta+3}}{(\theta+3)!} \left[\kappa_1 f_2^{(0, \delta)}(\tau_0, t) - m_1 f_1^{(0, \delta)}(\tau_0, t) - \frac{1}{a_1} f_2^{(0, \delta+1)}(\tau_0, t) \right] d\tau_0 \right\} / 12 /
\end{aligned}$$

Можна переконатися перевіркою, що формули /11/, /12/ задовольняють систему рівнянь /1/ і умови /3/, /4/.

Використовуючи /12/, знаходимо $u_1(0,t) = u_{11}(0,t) + u_{12}(0,t) = u_{21}(0,t) + u_{22}(0,t)$, $\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$. Після цього з /2/ визначаємо $\alpha_1(t), \beta_2(t)$:

$$\alpha_1(t) = \frac{\mu_1(t) - \alpha_2(t) u_2(0,t) - \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0}}{u_1(0,t)},$$

$$\beta_2(t) = \frac{\alpha_1(t) - \beta_1(t) u_1(0,t) - \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0}}{u_2(0,t)},$$

якщо $u_1(0,t), u_2(0,t) \neq 0$.

Зауважимо, що розв'язок /11/, /12/ задачі /1/, /3/, /4/ може бути використаний і для знаходження коефіцієнтів системи рівнянь /1/, якщо, наприклад, додатково задати $u_1(x_0, t_0), u_2(x_0, t_0)$ у фіксованій точці x_0, t_0 .

Стаття надійшла до редколегії 20.03.90

УДК 517.956.2

Г.П. Лопушанська

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ РОЗПОДІЛІВ

Відомо, що коли $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальна функція диференціального оператора з постійними коефіцієнтами $\mathcal{L}(D)$, то для довільної $F \in D'(R^n)$ узагальнена функція $/y \cdot \phi / u(x) = \mathcal{E} * F$ /якщо згортка існує/ є розв'язком у D' диференціального рівняння $\mathcal{L}u = F$, єдиним у класі тих функцій, для яких існує згортка із фундаментальною функцією. Дана теорема поширюється на загальні лінійні рівняння у згортках і аналоги її є для нелінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Ми розглянемо аналогічне представлення для розв'язку лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами і на основі цього один метод розв'язування крайових задач для рівнянь з частинними похідними у просторах розподілів.

© Лопушанська Г.П., 1991