Можна переконатися перевіркою, що формули /11/, /12/ задовольняють систему рівнянь /1/ і умови /3/, /4/.

Використовуючи /12/, знаходимо $u_1(0,t)=u_{11}(0,t)+u_{12}(0,t)$, $u_2(0,t)=u_{21}(0,t)+u_{22}(0,t)$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}$. Після цього з /2/ визначаємо $\alpha_1(t),\beta_2(t)$:

$$\alpha_1(t)=\frac{\mu_1(t)-\alpha_2(t)u_2(0,t)-\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}}{u_1(0,t)},$$

$$\beta_2(t)=\frac{\mu_2(t)-\beta_1(t)u_1(0,t)-\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}}{u_2(0,t)},$$

якщо $u_1(0,t)$, $u_2(0,t)\neq 0$.

Зауважимо, що розв"язок /11/, /12/ задачі /1/, /3/, /4/ може бути використаний і для знаходження коефіцієнтів системи рівнянь /1/, якщо, наприклад, додатково задати $u_1(x_0,t_0), u_2(x_0,t_0)$ у фіксованій точці x_0, t_0.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.90

УДК 517.956.2

Г.П. Лопушанська

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ РОЗПОДІЛІВ

Відомо, що коли $\mathcal{E}(x)$ – фундаментальна функція диференціального оператора з постійними коефіцієнтами $\mathcal{L}(D)$, то для довільної $F\in D'(R^n)$ узагальнена функція /у.ф./ $u(x)=\mathcal{E}*F$ /якщо згортка існує/ є розв"язком у D' диференціального рівняння $\mathcal{L}u=F$, єдиним у класі тих функцій, для яких існує згортка із фундаментальною функцією. Дана теорема поширюється на загальні лінійні рівняння у згортках і аналоги її є для нелінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Ми розглянемо аналогічне представлення для розв"язку лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами і на основі цього один метод розв"язування крайових задач для рівнянь з частинними похідними у просторах розподілів.

Нехай $\mathcal{L}(x,D)=\sum_{|k|\le m} a_k(x)D^k$, $a_k(x)\in C^\infty(R^n)$, $\varepsilon(x,y)$ – нормальна фундаментальна функція цього оператора, тобто розв"язок у $D'(R^n)$ рівняння $\mathcal{L}(x,D)\,\mathcal{E}(x,y)=\delta(x-y)$ такий, що $\mathcal{L}^*(y,D)\,\mathcal{E}(x,y)=\delta(x-y)$. Нехай $Z(R^n)=\{\psi(y)=(\varphi(x),\mathcal{E}(x,y)),\varphi\in D\}$ і на $Z(R^n)$ визначено лінійні неперервні функціонали, клас яких позначимо через $Z'(R^n)$. Скажемо, що послідовність $\psi_n(y)=(\varphi_n(x),\mathcal{E}(x,y))\xrightarrow[n\to\infty]{Z} 0$, якщо $\varphi_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{D} 0$. Для довільних $F\in Z'(R^n)$ визначено функціонал $f(x)=f_F:(\varphi(x),f(x))=((\varphi(x),\mathcal{E}(x,y)),F(y)),\varphi\in D$. Легко бачити, що $f\in D'(R^n)$.

Теорема 1. Нехай $F\in Z'(R^n),(\varphi(x),u(x))=((\varphi(x),\mathcal{E}(x,y)),F(y))$ для кожної $\varphi\in D(R^n)$. Тоді $u(x)$ є розв"язком у $Z'(R^n)$ рівняння

$$\mathcal{L}(x,D)u(x)=F(x) \qquad /1/$$

і він єдиний.

Справді, для довільної $\psi\in Z(R^n)\;\mathcal{L}^*\psi(y)=\mathcal{L}^*(y,D)(\varphi(x),\mathcal{E}(x,y))=$
$=(\varphi(x),\mathcal{L}^*(y,D)\mathcal{E}(x,y))=(\varphi(x),\delta(x-y))=\varphi(y)\in D(R^n),(\psi,\mathcal{L}u)=(\mathcal{L}^*\psi,u)=(\varphi,u)=(\psi,F)$.
Якщо $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два розв"язки рівняння /1/ із $D'(R^n)$, то для $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ маємо $\mathcal{L}(x,D)u(x)=0$ у $Z'(R^n)$, а для кожної $\varphi\in D$:

$$(\varphi(x),u(x))=(\mathcal{L}^*\psi(y),u(y))=(\psi(y),\mathcal{L}(y,D)u(y))=(\psi,0)=0,$$

тобто $u(x)=0$ в $D'(R^n)$.

У [4, 5] для еліптичного, у [6] для параболічного і в [7] для гіперболічного операторів побудовано представлення розв"язків крайових задач із заданими на границі області узагальненими функціями класів D' за допомогою функції Гріна. Розв"язки задач розуміємо у певному сенсі. Наприклад, для еліптичного оператора $\mathcal{L}$ 2-го порядку розв"язком $u(x)$ в області $\Omega\subset R^n$, обмеженій замкненою поверхнею S класу C^∞ узагальненої задачі Діріхле,

$$u\big|_S=F_1\ ,\quad F_1\in(C^\infty(S))'=D'(S) \qquad /2/$$

називаємо у.ф. u із $D'(\bar\Omega)=(C^\infty(\bar\Omega))'$, таку що

$$(\mathcal{L}^*\psi,u)_\Omega=(\psi,F)_\Omega-\langle Q\psi,F_1\rangle \qquad /3/$$

для довільної $\psi\in D_0(\bar\Omega)=\{\psi\in D(\bar\Omega):\psi|_S=0\}$, $F\in D_0'(\bar\Omega)$; тут $P=a\frac{d}{dN}+\beta$,
$Q=a\frac{d}{dN}+\beta-b,\ a(x)=\Big[\sum_{i=1}^n\big(\sum_{k=1}^n a_{ik}(x)n_k(x)\big)^2\Big]^{1/2},\ b=\sum_{i=1}^n e_i n_i,\ e_i=a_i-\sum_{k=1}^n\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k},$

$\beta \in D(S)$, n_i – напрямні косинуси внутрішньої нормалі $\vec{n}$, $\frac{d}{d\vec{N}}$ – оператор диференціювання по напрямку конормалі $\vec{N}$, $N_i = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_k$ – напрямні косинуси конормалі, $(\varphi, F)_0$ – дія $F \in D'(\bar{\Omega})$ на $\varphi \in D(\bar{\Omega})$ /а також $F \in D_0'(\bar{\Omega})$ на $\varphi \in D_0(\bar{\Omega})$ /, $<\varphi, F>$ – дія $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$.

У [1, 2, 4, 5, 10–13] розглянуто різні постановки узагальнених граничних задач для еліптичних однорідних рівнянь з гладкими коефіцієнтами. На прикладі задачі /1/–/2/ розглянемо ще один, більш загальний, підхід до розв"язування узагальнених граничних задач. Суть його – у зведенні крайової задачі до одного рівняння у просторі у.ф. і розв"язуванні останнього на підставі теореми 1 подібно до того, як у [3] розв"язується узагальнена задача Коші, а у [8, 9] для операторів з постійними коефіцієнтами деякі крайові задачі на областях на площині.

Нехай $U(x)$ – розв"язок задачі /1/–/2/ з гладкими $F(x)$ і $F_1(x)$, $\tilde{u}(x) = \begin{cases} U(x), x \in \Omega \\ 0, x \in R^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$, $\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), x \in \Omega \\ 0, x \in R^n \setminus \Omega \end{cases}$. Тоді $\tilde{u}(x)$ – регулярна у.ф. і для довільної $\psi \in Z(R^n)$ $(\psi, \mathcal{L}\tilde{u}) = (\mathcal{L}^*\psi, \tilde{u}) = \int_\Omega \mathcal{L}^*\psi(x) u(x) dx = \int_S \psi P u dS - \int_S Q\psi u dS + \int_\Omega \psi \mathcal{L} u dx = \int_S (\psi P u - Q\psi F_1) dS + \int_\Omega \psi F dx$.

Введемо у.ф. F_{0S}, $Q_S^* F_1 \in D'(R^n)$ з носіями на S, які діють на довільну основну функцію $\psi \in Z(R^n)$ за правилом

$$(\psi, F_{0S}) = <\psi, F_0>, \quad (\psi, Q_S^* F_1) = <Q\psi|_S, F_1>, \qquad /4/$$

при цьому $<\psi, F_0> = \int_S \psi F_0 dS$, $<Q\psi|_S, F_1> = \int_S Q\psi F_1 dS$ для гладких чи регулярних у.ф. F_0, $F_1 \in D'(S)$. Тепер

$$(\psi, \mathcal{L}\tilde{u}) = (\psi, F_{0S}) - (\psi, Q_S^* F_1) + (\psi, \tilde{F}) \quad \forall \psi \in Z(R^n),\ F_{0S} = Pu|_S. \qquad /5/$$

Це означає, що $\tilde{u}(x)$ є розв"язком у $Z'(R^n)$ диференціального рівняння

$$\mathcal{L}(x, D)\tilde{u}(x) = F_{0S}(x) - Q_S^* F_1(x) + \tilde{F}(x), \quad x \in R^n. \qquad /6/$$

За теоремою 1 $\tilde{u}(x) \in D'(R^n)$ і

$$(\varphi, \tilde{u}) = ((\varphi(x), \mathcal{E}(x,y)), F_{0S}(y) - Q_S^* F_1(y) + \tilde{F}(y)) \quad \forall \varphi \in D(R^n). \qquad /7/$$

а оскільки $\tilde{u}(x) = 0$ при $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$, то із /6/ маємо

$$((\varphi(x), \mathcal{E}(x,y)), F_{0S}(y)) = ((\varphi(x), \mathcal{E}(x,y)), Q_S^* F_1(y) - \tilde{F}(y)) \qquad /8/$$

$$\forall \varphi \in D(R^n \setminus \bar{\Omega}),$$

з огляду на властивості фундаментальної функції еліптичного оператора

$$< \int\limits_{R^n\setminus\bar{\Omega}} \varphi(x)\mathcal{E}(x,y)dx,\ F_0 > = < \int\limits_{R^n\setminus\bar{\Omega}} \varphi(x)Q_y\mathcal{E}(x,y)dx, F_1 > - (\int\limits_{R^n\setminus\bar{\Omega}} \varphi(x)\mathcal{E}(x,y)dx, \tilde{F}(y))$$

або $\int\limits_{R^n\setminus\bar{\Omega}} \varphi(x) < \mathcal{E}(x,y),\ F_0(y) > dx = \int\limits_{R^n\setminus\bar{\Omega}} \varphi(x) < Q_y\,\mathcal{E}(x,y), F_1(y) > dx -$

$$- \int\limits_{R^n\setminus\bar{\Omega}} \varphi(x)(\mathcal{E}(x,y), F(y))dx \quad \forall\varphi \in D(R^n\setminus\bar{\Omega}),$$

тобто

$$<\mathcal{E}(x,y), F_0(y)> = <Q_y\mathcal{E}(x,y), F_1> - (\mathcal{E}(x,y), F(y)),\ \ x \in R^n\setminus\bar{\Omega}. \qquad /9/$$

Зауважимо, що у [I2] ([I]) для $F(y)=0$ і $\mathcal{A}=\Delta$ показано, що умова /9/ є необхідною і достатньою для того, щоб розв"язок узагальненої задачі /I/–/2/ /зовнішньої узагальненої задачі Діріхле/ задовольняв /у певному сенсі/ умову $Pu|_S = \frac{\partial u}{\partial n}|_S = F_0$.

Із /8/ чи /9/ можна знайти невідому $F_0 \in D'(S)$. Позначимо через $S_{-\varepsilon}$ поверхню в $R^n\setminus\bar{\Omega}$, паралельну до S і розміщену на відстані ε від неї, для довільної $\varphi(x)\in D(S)$ визначимо $\varphi(x_{-\varepsilon})=\varphi(x)$, якщо $x_{-\varepsilon} = x - \varepsilon\nu(x)$, $x\in S$, $\vec{\nu}(x)$ – орт $\vec{n}(x)$. Тоді із /9/

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})P_x < \mathcal{E}(x_{-\varepsilon}, y), F_0(y) > dS_{-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})P_x \left[<Q_y\mathcal{E}(x_{-\varepsilon}, y), F_1(y)> - (\mathcal{E}(x_{-\varepsilon}, y), F(y))\right] dS_{-\varepsilon},$$

або, використовуючи аналог теореми Фубіні [3] і лему I з [5],

$$<\tfrac{1}{2}\varphi(y) + \int\limits_S \varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS, F_0> =$$

$$= <(Q_y \int\limits_S \varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS)_S, F_1> - (\int\limits_S \varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS, F) \quad \forall\varphi\in D(S),$$

тобто $< g, F_0 > = < Q\varphi_g, F_1 > - (\int\limits_S \varphi_g(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS, F) \quad \forall g \in D(S),$

$$Q\varphi_g = (Q_y \int\limits_S \varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS)_S, \qquad /10/$$

де φ_g – розв"язок інтегрального рівняння

$$\varphi(y) + 2\int\limits_S \varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS = 2g(y),\ y\in S, \qquad /11/$$

яке, як відомо [2, 4], однозначно розв"язане у $D'(S)$.

Покажемо, що у.ф. $F_0 \in D'(S)$, визначена згідно з /10/, /11/, задовольняє /9/. Розглянемо функцію $v(x) = \langle \mathcal{E}(x,y), F_0(y)\rangle - \langle Q_y \mathcal{E}(x,y), F_1(y)\rangle - (\mathcal{E}(x,y), F(y))$. Вона є гладким розв"язком рівняння $\mathcal{L}(x,D)\, v(x) = 0$ у $R^n \setminus \bar{\Omega}$ і задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon}) P_x v(x_{-\varepsilon})\, dS_{-\varepsilon} = 0 \quad \forall \varphi \in D(S),$$

тобто є розв"язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана [2] для однорідного еліптичного рівняння, а тоді за єдиністю розв"язку останнього $v(x) \equiv 0$, $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$, тобто виконується /9/.

Так само доводиться однозначність визначення $F_0 \in D'(S)$ із /9/. Справді, якби існували дві у.ф. F_{01} і F_{02}, то у.ф. $\bar{F}_0 = F_{01} - F_{02}$ задовольняла б умову

$$\langle \mathcal{E}(x,y), \bar{F}_0(y)\rangle = 0, \quad x \in R^n \setminus \bar{\Omega}. \qquad /12/$$

Розглядаючи функцію $w(x) = \langle \mathcal{E}(x,y), \bar{F}_0\rangle$ і враховуючи /12/, отримуємо

$$\mathcal{L} w(x) = 0,\ x \in R^n \setminus \bar{\Omega},\ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon}) P_x w(x_{-\varepsilon})\, dS_{-\varepsilon} = 0 \quad \forall \varphi \in D(S). \qquad /13/$$

Але

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon}) P_x w(x_{-\varepsilon})\, dS_{-\varepsilon} = \langle \tfrac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x) P_x \mathcal{E}(x,y)\, dS, \bar{F}_0\rangle .$$

Із однозначної розв"язності в $D(S)$ рівняння /11/ і із /13/ дістаємо $\langle g, \bar{F}_0\rangle = 0\ \forall g \in D(S)$, що і треба було довести. Таким чином доведена теорема 2.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $F \in Z'(\bar{\Omega})$, $F_1 \in D'(S)$. Існує єдиний розв"язок узагальненої задачі Діріхле /1/-/2/ $u(x) \in D'(\Omega)$, визначений формулою $(\varphi, u) = \langle (\varphi(x), \mathcal{E}(x,y)), F_0(y)\rangle - \langle (\varphi(x), Q_y \mathcal{E}(x,y)), F_1\rangle +$

$$+ ((\varphi(x), \mathcal{E}(x,y)), F(y)) \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

де $F_0 \in D'(S)$ і визначається із /10/, /11/.

<u>Теорема 3.</u> Нехай $F \in Z'(\bar{\Omega}) \cap D_0(\bar{\Omega})$, $F_1 \in D'(S)$, $u(x)$ – розв"язок узагальненої задачі Діріхле /1/-/2/ в сенсі /6/, де F_0 визначається із /9/. Тоді $u(x)$ є розв"язком із $D'(\Omega)$ узагальненої задачі /1/-/2/ в сенсі /3/, і навпаки.

Справді, із /6/ для довільної $\psi \in D_0(\bar{\Omega})$ маємо $(\mathcal{L}^* \psi, \tilde{u}) = -\langle Q\psi, F_1\rangle + (\psi, \tilde{F})$, а тоді $(\mathcal{L}^* \psi, u)_0 = -\langle Q\psi, F_1\rangle + (\psi, F)_0$. Навпаки, легко перевірити, що у.ф. $u(x) \in D'(\Omega)$, визначена в [4] як єдиний розв"язок задачі /1/-/2/ в сенсі /3/, задовольняє також /6/.

Аналогічні результати правильні для інших крайових задач, внутрішніх і зовнішніх, у тому числі зі змішаними крайовими умовами.

1. Бойко Г.П. Про зв"язок зовнішніх узагальнених задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1974. Вип. 9. С.7-11. 2. Бойко Г.П., Волошина М.С., Гупало А.С. Обобщенная задача Неймана для одного класса эллиптических систем второго порядка // Математ. физика. 1977. Вып. 21. С.65-70. 3. Владимиров В.С Обобщенные функции в математической физике. М., 1979. 4. Гупало Г.С., Лопушанська Г.П. Задача Діріхле для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу в просторі узагальнених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 24. С.16-20. 5. Лопушанская Г.П. О некоторых свойствах решений нелокальных эллиптических задач в пространстве обобщенных функций // Укр. мат.журн. 1989. Т.41. № 11. С.1487-1494. 6. Лопушанская Г.П. О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн. 1986. Т.38. № 6. С.795-798. 7. Лопушанская Г.П. Об одном представлении первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в пространстве обобщенных функций. К., 1986. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2358-Ук.86. 8. Лопушанська Г.П., Новинюк А.А. Про розв"язки у замкненому вигляді класичних і некласичних крайових задач для рівняння коливання струни у напівсмузі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.39. С.8-12. 9. Малаховская Р.М. Приложение операционного метода в обобщенных функциях к исследованию краевых задач // Тр. Томс. ун-та. Сер. мех.-мат. 1975. Т.220. С.29-39. 10. Рогожин В.С., Дайко С.П. О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1971. Т.7. № 3. С.501-509. 11. Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г. Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее применения // Математ. сб. 1969. Т.78. № 3. С.446-472. 12. Szmydt Z. Le rapport mutuel des problemes generalisis de Dirichlet et de Neumann // Ann. Polon. Math. 1966. Vol. 18. N1. P. 31-42.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.90

5-2139