УДК 513

О.Я.Мильо

УМОВИ САМОСПРЯЖЕНОСТІ ТА МАКСИМАЛЬНОЇ АКРЕТИВНОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ НА ПРОМІЖКУ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Нехай $H = L_2(0;1)$, $l(y) = -y'' + y$, $D(L_0) = H_0^2(0;1)$, $L_0 y = -y'' + y$.

Оператор L_0 додатно визначений і симетричний. Оператор L_0^* має вигляд $L_0^* y = -y'' + y$, де $y \in H^2(0;1)$. Тобто множина $D(L_0)$ виділяється із $D(L_0^*)$ граничними умовами

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0 .$$

Отже, $\dim {}^{D(L_0^*)}/D(L_0) = 4$, або інакше $L_0 \subset^4 L_0^*$ [див. 6]. Розглянемо звуження оператора L_0 на множину

$$\left\{ y \in D(L_0) : (y|\psi_1)_1 = 0 ,\ (y|\psi_2)_1 = 0 \right\} .$$

Позначимо дане звуження через L_{min}. ψ_1, ψ_2 належать H_0^1 і лінійно незалежні за модулем H^2. При $\psi_i \in H_0^1 \setminus H^2$ оператор L_{min} замкнений і щільно визначений в $L_2(0;1)$, отже, для нього існує спряжений. Позначимо $L_{max} \overset{def}{=} L^*_{min}$. Оскільки за умовою $L_{min} \subset^2 L_0$, то $L_0^* \subset^2 L_{max}$. Таким чином, справедлива лема 1.

<u>Лема 1.</u> $D(L_{max}) = D(L_0^*) + sp\{\psi_1, \psi_2\}$.

Отже, для довільного $y \in D(L_{max})$ коректно визначені лінійні функціонали $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$, що визначаються умовою

$$y = x + \alpha_1(y)\psi_1 + \alpha_2(y)\psi_2 ,$$

де $x \in H^2$. Причому $L_{max} y = L_0^* x$.

Нехай P – проектор $D(L_{max})$ на $D(L_0^*)$ паралельно $sp\{\psi_1, \psi_2\}$, а $Q = 1_{D(L_{max})} - P$.

Введемо позначення

$$(Py)'(0) = \gamma_1(y) ,\quad \alpha_1(y) = \gamma_5(y) ,$$
$$(Py)(0) = \gamma_2(y) ,\quad (y|\psi_1)_1 = \gamma_6(y) ,$$
$$(Py)'(1) = \gamma_3(y) ,\quad \alpha_2(y) = \gamma_7(y) ,$$
$$(Py)(1) = \gamma_4(y) ,\quad (y|\psi_2)_1 = \gamma_8(y) .$$

Формула Лагранжа матиме вигляд

$$(L_{max}\, y\,|\,z)-(y\,|\,L_{max}\, z)=$$
$$=\gamma_1(y)\overline{\gamma_2(z)}-\gamma_2(y)\overline{\gamma_1(z)}-\gamma_3(y)\overline{\gamma_4(z)}+\gamma_4(y)\overline{\gamma_3(z)}-$$
$$-\gamma_5(y)\overline{\gamma_6(z)}+\gamma_6(y)\overline{\gamma_5(z)}-\gamma_7(y)\overline{\gamma_8(z)}+\gamma_8(y)\overline{\gamma_7(z)}\,.$$

Для додатно визначених операторів серед всіх додатно визначених самоспряжених розширень знайдуться два "крайніх" розширення: L_F – "жорстке", або розширення за Фрідріхсом, L_K – "м"яке", або крейнівське [5].

Побудуємо "жорстке" розширення оператора L_{min}.

Нехай He – поповнення $D(L_{min})$ за нормою, породженою скалярним добутком $[x,y]=(L_{min}\,x\,|\,y)$, $x,y\in D(L_{min})$. "Жорстке" розширення оператора L_{min} є звуженням оператора L_{max} на підпростір $D(L_{max})\cap He$ [2]. Енергетичний простір He оператора L_{min} становлять елементи y такі, що $\{y\in H_0^1:(y\,|\,\psi_1)_1=(y\,|\,\psi_2)_1=0\}$.

Отже, має місце лема 2.

Лема 2. $D(L_F)=\{y\in D(L_{max}):$

$$\gamma_2(y)=\gamma_4(y)=\gamma_6(y)=\gamma_8(y)=0\}\,.$$

Тепер знайдемо "м"яке" розширення оператора L_{min}. Відомо [5], що $D(L_K)=D(L_{min})\dot{+}\ker L_{max}$.
Оскільки $\ker L_{max}=sp\{\psi_1,\psi_2,l_+,l_-\}$, де $l_\pm(t)=l^{\pm i}$, то

$$D(L_K)=D(L_{min})\dot{+}sp\{\psi_1,\psi_2,l_+,l_-\}\,.$$

Довільне замкнуте симетричне розширення оператора L_{min} є звуженням оператора L_{max} на підпростір в $D(L_{max})$, який визначається симетричним сімейством граничних умов [див.: 2]. Отримуємо лему 3.

Лема 3.

$$D(L_K)=\left\{y\in D(L_{max}):\begin{array}{l}1/\ \gamma_4(y)+\gamma_3(y)=i(\gamma_2(y)+\gamma_1(y))\\ 2/\ \gamma_4(y)-\gamma_3(y)=\frac{1}{i}(\gamma_2(y)-\gamma_1(y))\\ 3/\ \gamma_6(y)-\gamma_5(y)=0\\ 4/\ \gamma_8(y)-\gamma_7(y)=0\end{array}\right\}.$$

Означення 1. A – замкнений симетричний оператор в H. Трійка $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$, де $\mathcal{H}$ – гільбертів простір, Γ_1,Γ_2 – лінійні відображення $D(A^*)$ в $\mathcal{H}$, називається простором граничних значень оператора A, якщо:

1/ для довільних $f, g \in D(A^*)$

$$(A^* f | g) - (f | A^* g) = (\Gamma_1 f | \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f | \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}} ;$$

2/ для довільних $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ існує такий вектор $f \in D(A^*)$, що $\Gamma_1 f = F_1$, $\Gamma_2 f = F_2$ [див. 1, с. 158].

Позначимо

$$\Gamma_1 y = \{ \gamma_1(y), -\gamma_3(y), -\gamma_5(y), -\gamma_7(y) \} ,$$

$$\Gamma_2 y = \{ \gamma_2(y), \gamma_4(y), \gamma_6(y), \gamma_8(y) \} .$$

Теорема 1. $(\mathbb{C}^4, \Gamma_1, \Gamma_2)$ – простір граничних значень оператора L_{min}.

Справді, формула Лагранжа матиме вигляд

$$(L_{max} y | z) - (y | L_{max} z) =$$
$$= [\gamma_1(y) \overline{\gamma_2(z)} - \gamma_3(y) \overline{\gamma_4(z)} - \gamma_5(y) \overline{\gamma_6(z)} - \gamma_7(y) \overline{\gamma_8(z)}] -$$
$$- [\gamma_2(y) \overline{\gamma_1(z)} - \gamma_4(y) \overline{\gamma_3(z)} - \gamma_6(y) \overline{\gamma_5(z)} - \gamma_8(y) \overline{\gamma_7(z)}] =$$
$$= (\Gamma_1 y | \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y | \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4} .$$

В позначеннях Γ_1, Γ_2 леми 2 та 3 матимуть вигляд:

Лема 2. $D(L_F) = \{ y \in D(L_{max}) : \Gamma_2 y = 0 \}$.

Лема 3. $D(L_K) = \{ y \in D(L_{max}) : \Gamma_1 y = \mathcal{E} \Gamma_2 y \}$,

де

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} -\frac{l^2+1}{l^2-1} & \frac{2l}{l^2-1} & 0 & 0 \\ \frac{2l}{l^2-1} & \frac{l^2+1}{l^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Зафіксуємо деяке додатно визначене самоспряжене розширення $\tilde{A}$ оператора A. Має місце розклад

$$D(A^*) = D(\tilde{A}) + \ker A^* . \qquad /1/$$

Позначимо через P і P_0 проектори $D(A^*)$ на $D(\tilde{A})$ і $\ker A^*$, що відповідають розкладу /1/.

Означення 2. Трійка $(\mathcal{H}, \Delta_1, \Delta_2)$, де $\mathcal{H}$ – гільбертів простір, Δ_1, Δ_2 – лінійні відображення $D(A^*) \to \mathcal{H}$, називається позитивним простором граничних значень оператора A, який відповідає розкладу /1/, якщо:

1/ для довільних $f, g \in D(A^*)$

$$(A^* f | g) = (\tilde{A} P f | P g) + (\Delta_1 f | \Delta_2 z)_{\mathcal{H}} ;$$

2/ для довільних $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ існує такий вектор $f \in D(A^*)$, що $\Delta_1 f = F_1$, $\Delta_2 f = F_2$ [див.: 1, с. 163].

Побудуємо позитивний простір граничних значень оператора L_{min}, що відповідає розширенню L_F.

Позначимо $\Delta_1 = \Gamma_1 - \varepsilon \Gamma_2$, $\Delta_2 = \Gamma_2$.

Запишемо формулу Лагранжа:

$$(L_{max} y | z) - (y | L_{max} z) = (\Gamma_1 y | \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y | \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4} =$$

$$= ((\Delta_1 + \varepsilon \Delta_2) y | \Delta_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Delta_2 y | (\Delta_1 + \varepsilon \Delta_2) z)_{\mathbb{C}^4} =$$

$$= (\Delta_1 y | \Delta_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Delta_2 y | \Delta_1 z)_{\mathbb{C}^4} .$$

Теорема 2. $(\mathbb{C}^4, \Delta_1, \Delta_2)$ – позитивний простір граничних значень оператора L_{min}, що відповідає розширенню L_F

Нехай оператор L, $L \subset L_{max}$ визначається граничними умовами виду

$$A_{11}\begin{pmatrix}\gamma_1(y)\\-\gamma_3(y)\end{pmatrix} + A_{12}\begin{pmatrix}-\gamma_5(y)\\-\gamma_7(y)\end{pmatrix} + B_{11}\begin{pmatrix}\gamma_2(y)\\\gamma_4(y)\end{pmatrix} + B_{12}\begin{pmatrix}\gamma_6(y)\\\gamma_8(y)\end{pmatrix} = 0 ,$$

$$A_{21}\begin{pmatrix}\gamma_1(y)\\-\gamma_3(y)\end{pmatrix} + A_{22}\begin{pmatrix}-\gamma_5(y)\\-\gamma_7(y)\end{pmatrix} + B_{21}\begin{pmatrix}\gamma_2(y)\\\gamma_4(y)\end{pmatrix} + B_{22}\begin{pmatrix}\gamma_6(y)\\\gamma_8(y)\end{pmatrix} = 0 ,$$

де A_{ij}, B_{ij} – матриці 2×2. Ці умови можна переписати так:

$$A\Gamma_1 y + B\Gamma_2 y = 0,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} .$$

Використовуючи результати, отримані у працях [3, 4, 7], і узагальнюючи описані вище результати, одержуємо теорему 3

Теорема 3.

1/ $L = L^*$ тоді і тільки тоді, коли AB^* – самоспряжена матриця;

2/ $L \geq 0$ тоді і тільки тоді, коли $AB^* \leq 0$;

3/ L – максимально акретивний тоді і тільки тоді, коли $Re(AB^*) \leq 0$.

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: Спектральная теория. М., 1966. 3. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отно-

шений // Математ. заметки. 1975. 17. № 1. С.41-48. 4. Кочубей А.М. Про розширення додатно визначеного симетричного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1979. № 3. С. 168-171. 5. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения. I, II // Математ. сб. 1947. 20. № 3. С.431-495; 21. № 3. С.365-404. 6. Лянце В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1972. Вып. 16. С.165-186. 7. Рофе-Бекетов Ф.С. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1969. Вып. 8. С.3-24.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.90

УДК 539.3

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко,
Халіль Басьюні

КУСКОВО-ГЛАДКА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ КОШІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА СКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в області $D=\{x,y: 0<x<a; 0<y<b\}$ та задовольняє умову Ліпшіца з постійною L по змінній y. Тоді у достатньо малому околі точки $(x_0, y_0)\in D$ буде існувати єдиний розв"язок задачі Коші:

$$y'=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0. \qquad /1/$$

Доведено*, що коли $hL<1$ та $y_0\neq 0$, то при $|x-x_0|<h$ розв"язок задачі /1/ можна наблизити за допомогою такої лінеаризованої задачі Коші:

$$\tilde{y}'=\kappa(x)\tilde{y}, \quad \tilde{y}(x_0)=y_0, \qquad /2/$$

де

$$\kappa(x)=\frac{f(x,y_0)}{y_0}.$$

Покажемо, як можна узагальнити запропоновану лінеаризацію на випадок довільного скінченного інтервалу $|x-x_0|<H$. Не-

*Мартиненко Марія Д., Басьюні Халіль. Лінеаризація для нелінійної задачі Коші першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.35.