шений // Математ. заметки. 1975. 17. № 1. С.41-48. 4. Кочубей А.М. Про розширення додатно визначеного симетричного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1979. № 3. С. 168-171. 5. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения. I, II // Математ. сб. 1947. 20. № 3. С.431-495; 21. № 3. С.365-404. 6. Лянце В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1972. Вып. 16. С.165-186. 7. Рофе-Бекетов Ф.С. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1969. Вып. 8. С.3-24.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.90

УДК 539.3

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко,
Халіль Басьюні

КУСКОВО-ГЛАДКА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ КОШІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА СКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в області $D=\{x,y: 0<x<a; 0<y<b\}$ та задовольняє умову Ліпшица з постійною L по змінній y. Тоді у достатньо малому околі точки $(x_0, y_0)\in D$ буде існувати єдиний розв"язок задачі Коші:

$$y'=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0. \qquad /1/$$

Доведено*, що коли $hL<1$ та $y_0\neq 0$, то при $|x-x_0|<h$ розв"язок задачі /1/ можна наблизити за допомогою такої лінеаризованої задачі Коші:

$$\tilde{y}'=\kappa(x)\tilde{y}, \quad \tilde{y}(x_0)=y_0, \qquad /2/$$

де

$$\kappa(x)=\frac{f(x,y_0)}{y_0}.$$

Покажемо, як можна узагальнити запропоновану лінеаризацію на випадок довільного скінченного інтервалу $|x-x_0|<H$. Не-

*Мартиненко Марія Д., Басьюні Халіль. Лінеаризація для нелінійної задачі Коші першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.35.

хай m - ціле число, яке задовольняє умову $\frac{HL}{m}<1, x_{i+1}=x_i+h$, де $h=\frac{H}{m}$, $i=\overline{0,m}$. На кожному проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ вихідна задача /1/ конкретизується так:

$$y_i' = f(x, y_i),\ y_i(x_i)=y_i^0,\quad i=\overline{0,m};\ y_0^0=y_0=y(x_0). \qquad /3/$$

Задача /3/ лінеаризується згідно /2/:

$$\tilde{y}_i' = \kappa_i(x)\tilde{y}_i,\quad \tilde{y}_i(x_i)=y_i^0,\ y_i^0=\tilde{y}_{i-1}(x), \qquad /4/$$

де
$$\kappa_i(x)=\frac{f(x,\tilde{y}_i^0)}{\tilde{y}_i^0},\quad \tilde{y}_0^0=y_0 .$$

Тут $y_i(x), \tilde{y}_i(x)$ - точний та лінеаризований розв"язок задачі /1/, коли $x\in[x_i, x_{i+1}]$.

Близькість розв"язків задач /3/ та /4/ оцінюється нерівностями

$$\max_{x_i<x<x_i+h}|y_i(x)-\tilde{y}_i(x)|\le\frac{|y_i^0-\tilde{y}_i^0|+h\left[L+\frac{A_i}{|\tilde{y}_i^0|}\right]\max\limits_{x_i<x<x_i+h}|\tilde{y}_i(x)-\tilde{y}_i^0|}{1-hL}; \qquad /5/$$

$$|y_i^0-\tilde{y}_i^0|\le\frac{1}{1-hL}\left\{|y_{i-1}^0-\tilde{y}_i^0|+h\left[L+\frac{A_{i-1}}{|\tilde{y}_{i-1}^0|}\max_{x_{i-1}<x<x_i}|\tilde{y}_i(x)-\tilde{y}_{i-1}^0|\right\}\right.. \qquad /6/$$

Тут
$$A_i=\max_{x_i<x<x_{i+1}}|f(x,\tilde{y}_i^0)| .$$

Легко встановити і таку оцінку близькості розв"язків задачі /1/ та кусково-гладкої лінеаризованої задачі /4/:

$$\max_{x_k<x<x_{k+1}}|y(x)-\tilde{y}(x)|\le\frac{h}{1-Lh}\left\{\sum_{i=0}^{k-1}L\max_{x_i<x<x_{i+1}}|y(x)-\tilde{y}(x)|+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{k}\left[L+\frac{A_i}{|\tilde{y}_i^0|}\right]\max_{x_i<x<x_{i+1}}|\tilde{y}(x)-\tilde{y}_i^0|\right\}. \qquad /7/$$

Нерівності /5/-/6/ та /7/ мають рекурентний характер. Методом послідовних виключень можна позбутися фігуруючих у їх правих частинах перших членів. З цією метою випишемо необхідні нерівності при $K=0$ та $K=1$:

$$\max_{x_0<x<x_1} |y(x)-\tilde{y}(x)| \leq \frac{h\left[L+\frac{A_0}{|y_0|}\right]}{1-Lh} \max_{x_0<x<x_1} |\tilde{y}(x)-y_0| ;$$

$$\max_{x_1<x<x_2} |y(x)-\tilde{y}(x)| \leq \frac{h}{1-Lh} \left\{ \frac{L+\frac{A_0}{|y_0|}}{1-Lh} \max_{x_0<x<x_1} |\tilde{y}(x)-y_0| + \right.$$

$$\left. +\left[L+\frac{A_1}{|\tilde{y}_1^0|}\right] \max_{x_1<x<x_2} |\tilde{y}(x)-\tilde{y}_1^0| \right\} .$$

Вищевказаний метод лінеаризації перенесено на розв"язування нелінійних задач Коші та граничних задач другого порядку достатньо загального виду.

Стаття надійшла до редколегії 05.09.90

УДК 517.52

В.О.П"яна

УТОЧНЕННЯ ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ ДЛЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Адамс і Страус [1] показали, що раціональні функції однозначно визначаються прообразами чотирьох точок, тобто якщо f_1 і f_2 – раціональні функції,

$$\left\{z \in \overline{\mathbb{C}} \cdot f_1(z)=a_j\right\} = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : f_2(z)=a_j\right\},\ j=1,\ldots,4, \qquad /1/$$

де $a_1,\ldots,a_4$ – різні точки з $\mathbb{C}$, то $f_1(z)=f_2(z)$. Підкреслимо, що мова йде про рівність множин, порядки a_j – точок не враховуються. Уточнимо цю теорему єдиності для раціональних функцій, враховуючи їх степінь. Нагадаємо, що коли раціональна функція $R=P/Q$, де P і Q – нескоротні многочлени, то степенем R називається $\max\{\deg P, \deg Q\}$.

Теорема. Якщо f_1 і f_2 – раціональні функції, $\deg f_1 \leq 2$, $\deg f_2 \leq 2$ і /1/ виконується для j = 1, 2, 3, то $f_1=f_2$. При $\deg f_1 \leq 3$, $\deg f_2 \leq 3$ це твердження втрачає силу.

Доведення. Якщо $\deg f_1=\deg f_2=1$, то f_1 і f_2 – дробово-лінійні функції, а в цьому випадку твердження теореми добре відоме. Нехай $\deg f_1=2$. Не зменшуючи загальності, можна