ності при $K=0$ та $K=1$:

$$\max_{x_0<x<x_1} |y(x)-\tilde{y}(x)| \le \frac{h\left[L+\frac{A_0}{|y_0|}\right]}{1-Lh} \max_{x_0<x<x_1} |\tilde{y}(x)-y_0| ;$$

$$\max_{x_1<x<x_2} |y(x)-\tilde{y}(x)| \le \frac{h}{1-Lh} \left\{ \frac{L+\frac{A_0}{|y_0|}}{1-Lh} \max_{x_0<x<x_1} |\tilde{y}(x)-y_0| + \right.$$

$$\left. +\left[L+\frac{A_1}{|\tilde{y}_1^0|}\right] \max_{x_1<x<x_2} |\tilde{y}(x)-\tilde{y}_1^0| \right\} .$$

Вищевказаний метод лінеаризації перенесено на розв"язування нелінійних задач Коші та граничних задач другого порядку достатньо загального виду.

Стаття надійшла до редколегії 05.09.90

УДК 517.52

В.О.П"яна

УТОЧНЕННЯ ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ ДЛЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Адамс і Страус [1] показали, що раціональні функції однозначно визначаються прообразами чотирьох точок, тобто якщо f_1 і f_2 – раціональні функції,

$$\left\{z\in\bar{\mathbb{C}} \cdot f_1(z)=a_j\right\} = \left\{z\in\bar{\mathbb{C}} : f_2(z)=a_j\right\}, \; j=1,\dots,4, \qquad /1/$$

де $a_1,\dots,a_4$ – різні точки з $\mathbb{C}$, то $f_1(z)=f_2(z)$. Підкреслимо, що мова йде про рівність множин, порядки a_j – точок не враховуються. Уточнимо цю теорему єдиності для раціональних функцій, враховуючи їх степінь. Нагадаємо, що коли раціональна функція $R=P/Q$, де P і Q – нескоротні многочлени, то степенем R називається $\max\{\deg P, \deg Q\}$.

<u>Теорема</u>. Якщо f_1 і f_2 – раціональні функції, $\deg f_1\le 2$, $\deg f_2\le 2$ і /1/ виконується для $j=1, 2, 3$, то $f_1=f_2$. При $\deg f_1\le 3$, $\deg f_2\le 3$ це твердження втрачає силу.

<u>Доведення</u>. Якщо $\deg f_1=\deg f_2=1$, то f_1 і f_2 – дробово-лінійні функції, а в цьому випадку твердження теореми добре відоме. Нехай $\deg f_1=2$. Не зменшуючи загальності, можна

вважати, що $a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=\infty$, цього завжди можна досяіти за допомогою дробово-лінійного перетворення у W – площині.

Серед a_j – точок $(a_j=0,1,\infty)$ функції f_1 принаймні для двох a_j повинні обов"язково бути кратними. У протилежному випадку, якщо, наприклад, всі нулі та полюси f_1 прості, то й у f_2 нулі та полюси прості і $f_1/f_2\equiv C=const$. Оскільки f_1 і f_2 мають спільні одиниці, то $C=1$. Отже, можна вважати, що f_1 має один нуль порядку 2 і один полюс порядку 2. Зробивши дробово-лінійне перетворення в Z – площині, можна вважати, що $f_1(z)=0$ при $z=0$, $f_1(z)=\infty$ при $z=p\neq 0$, а в $z=\infty$ функція f_1 має одиницю. Тобто $f_1(z)=\frac{z^2}{(z-p)^2}$.

Функція $f_2(z)$ не може бути функцією виду $f_2(z)=A\frac{z}{(z-p)^2}, A\neq 0$, або $f_2(z)=A\frac{z^2}{z-p}$, $A\neq 0$, або $f_2(z)=A\frac{z^2}{(z-p)^2}$, $A\neq 0,1$, оскільки в $z=\infty$ функція $f_2(z)$ повинна мати одиницю. Звідси випливає, що єдиний можливий варіант представлення f_2 – це функція виду $f_2(z)=\frac{z}{z-p}$. Множини нулів і полюсів $f_1(z)$ і $f_2(z)$ збігаються. Щодо множини одиниць, то у f_2 вона складається з одного значення $z=\infty$, а у f_1 множина одиниць, крім $z=\infty$, містить ще і значення $z=\frac{p}{2}$, що неможливе.

Обмеження на степені f_1 і f_2 не можна послабити. Можна побудувати дві різні раціональні функції третього степеня, що мають однакові множини нулів, полюсів і одиниць. Прикладами таких функцій є функції

$$f_1(z)=\frac{z^2(4z-3-\sqrt{3}i)}{(z-1)^2(4z-1-\sqrt{3}i)} \quad \text{і} \quad f_2(z)=\frac{z(4z-3-\sqrt{3}i)^2}{(z-1)(4z-1-\sqrt{3}i)^2}.$$

У [2] наведено приклад двох різних раціональних функцій четвертого степеня, що мають однакові множини нулів, одиниць і полюсів.

1. Adams W.W., Straus E.G. Non archimedian analytic functions taking the same values at the same points // Ill. J. Math. 1971. Vol. 15. N 3. P. 418-424. 2. Pizer A.K. A problem on rational functions // Amer. Math. Monthly. 1973. Vol. 80. N 5. P. 552-553.

Стаття надійшла до редколегії 06.02.90

6-2139