$$R_{p_i} = \mathcal{L}_{p_i} + \langle e_i \rangle, \ \mathcal{L}_{p_i} \cap \langle e_i \rangle = 0,$$
$$e_i \mathcal{L}_{p_i} = 0, \ \langle e_i \rangle \simeq \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z} \ (n_i \in \mathbb{N}),$$
$$\mathcal{L}_{p_i}^2 = 0; \ l_i e_i = l_i \text{ , якщо } l_i \in \mathcal{L}_{p_i} .$$

Позначимо $\mathcal{L} = \sum_i \oplus \mathcal{L}_{p_i}$, $\Phi = \sum_i \oplus \langle e_i \rangle$.
Тоді, очевидно, $\mathcal{L}$ – радикал Левицького кільця R, $\Phi\mathcal{L} = 0$.
Теорема доведена.

1. А н д р и я н о в В.И., Ф р е й д м а н П.А. О гамильтоновых кольцах // Уч. зап. Свердлов. гос. пед. ин-та. 1965. Вып. 31. С.3-23. 2. А р т е м о в и ч О.Д. Про праві гамільтонові кільця // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 34. С.70-73. 3. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Новосибирск, 1982. 4. Ф р е й д м а н П.А. Кольца с правым идеализаторным условием // Математ. зап. Уральск. ун-та, 1963. Т.4. Тетр. 3. С.51-58. 5. Ф р е й д м а н П.А. Кольца с идеализаторным условием. II // Уч. зап. Уральск. ун-та. 1959. Т.23 /мат. № 2/. Тетр. 1. С.35-48. 6. Ф р е д а н П.А. Кольца с идеализаторным условием // Уч. зап. Уральск. ун-та. 1960. Т.23 /мат. № 2/. Тетр. 3. С.49-61. 7. Х м е л ь н и ц к и й И.Л. Кольца, в которых все подкольца являются метаидеалами конечного индекса // Изв. вузов. Математика. 1979. № 4. С.53-67.

Стаття надійшла до редколегії 29.04.90

УДК 512.58 + 515.12

М.М.Зарічний

ПРОДОВЖЕННЯ ПРИРОДНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ НА КАТЕГОРІЇ КЛЕЙСЛІ

Всі необхідні означення з теорії категорій можна знайти у праці [2]. Ї.Вінарек [3] розглянув задачу продовження функторів на категорії Клейслі і показав, що продовження функтора $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ на категорію Клейслі $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ монади $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ на категорії $\mathcal{C}$ перебувають у біективній відповідності з природними перетвореннями $\xi: FT \to TF$, для яких $\xi \circ F\eta = \eta F$ і $\xi \circ F\mu = \mu F \circ T\xi \circ \xi T$ /такі природні перетворення ми будемо називати асоційованими з відповідними продовженнями/.

У цій статті ми розглядаємо таку задачу. Нехай $t: F \to F'$ – природне перетворення ендофункторів у категорії

$\mathcal{C}, \bar{F}, \bar{F}'$ - продовження функторів F, F' відповідно на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$. Коли t є також природним перетворенням продовжених функторів $\bar{F}, \bar{F}'$?

Позначимо через $\xi : FT \longrightarrow TF,\ \xi' : F'T \longrightarrow TF'$ природні перетворення, асоційовані з продовженнями $\bar{F}$ і $\bar{F}'$ відповідно.

<u>Означення.</u> Природне перетворення $t : F \longrightarrow F'$ називається $\mathbb{T}$ -узгодженим, якщо $Tt \circ \xi = \xi' \circ tT$.

<u>Теорема 1.</u> Для того щоб природне перетворення $t : F \to F'$ було також і природним перетворенням продовжених функторів, необхідно і досить, щоб воно було $\mathbb{T}$ -узгодженим.

<u>Доведення.</u> <u>Необхідність.</u> Нехай $f : X \longrightarrow TY$ - морфізм в $\mathcal{C}$. Розглядаючи f як морфізм з X в Y в категорії $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, одержуємо

$$\begin{aligned}
&\bar{F}'f * tX = \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ TF'f \circ \eta F'X \circ tX = \\
&= \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ \eta F'TY \circ F'f \circ tX = \\
&= \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ \eta F'TY \circ TtY \circ Ff = \\
&= \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ TtTY \circ \eta FTY \circ Ff = \\
&= \mu F'Y \circ T^2tY \circ T\xi Y \circ \eta FTY \circ Ff = \\
&= \mu F'Y \circ T^2tY \circ \eta TFY \circ \xi Y \circ Ff = \\
&= \mu F'Y \circ \eta TF'Y \circ TtY \circ \xi Y \circ Ff = \\
&= \mu F'Y \circ T\eta F'Y \circ TtY \circ \xi Y \circ Ff = \\
&= tY * \bar{F}f,
\end{aligned}$$

тобто $t : \bar{F} \longrightarrow \bar{F}'$ - природне перетворення.

<u>Достатність.</u> Беручи у наведених вище міркуваннях $f = 1_{TY} : TY \longrightarrow TY$, одержуємо, що $\xi Y \circ TtY =$
$= \mu F'Y \circ T\eta F'Y \circ TtY \circ \xi Y \circ 1_{FTY} =$
$= \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ \eta F'TY \circ tTY \circ 1_{FTY} =$
$= \mu F'Y \circ \eta TF'Y \circ \xi Y \circ tTY = \xi Y \circ tTY,$

тобто природне перетворення t є $\mathbb{T}$ - узгодженим. Теорема доведена.

Твердження 1. Природне перетворення $\xi = \eta T \circ \mu : T^2 \to T^2$ є асоційованим з продовженням функтора T на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

Твердження 2. Нехай функтори $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ продовжуються на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ і $\xi : FT \to TF$, $\xi' : F'T \to TF'$ – природні перетворення, асоційовані з цими продовженнями. Тоді природне перетворення $\tilde{\xi} = \xi' F \circ F' \xi$ є асоційованим з продовженням функтора $\tilde{F} = F'F$ на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

Доведення проводяться безпосередньо.

З тверджень 1 і 2 випливає, що довільна скінченна ітерація T^k функтора T продовжується на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

Нехай для природного перетворення $\xi : T^2 \to T^2$, асоційованого з деяким продовженням функтора T на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, виконана умова

$$/*/ \qquad \xi \circ \mu T = T\mu \circ \xi T \circ T\xi .$$

Тоді для будь-якого $k \geq 1$ природне перетворення $\tilde{\xi}_k = \xi T^{k-1} \circ T\xi T^{k-2} \circ \ldots \circ T^{k-2}\xi T \circ T^{k-1}\xi$ асоційоване з продовженням функтора T^k на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$. Це перевіряється безпосередніми обчисленнями.

Твердження 3. Природне перетворення $\mu T^{k-2} : T^k \to T^{k-1}$, $k \geq 2$, є $\mathbb{T}$ – узгодженим щодо продовжень функторів T^k, T^{k-1} на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, з якими асоційовані природні перетворення $\tilde{\xi}_k$, $\tilde{\xi}_{k-1}$ відповідно.

Доведення. Перевіряємо умову $\mathbb{T}$ – узгодженості:

$$\tilde{\xi}_{k-1} \circ \mu T^{k-1} = \xi T^{k-2} \circ T\xi T^{k-3} \circ \ldots \circ T^{k-3}\xi T \circ$$
$$\circ T^{k-2}\xi \circ \mu T^{k-1} = \xi T^{k-2} \circ T\xi T^{k-3} \circ \ldots \circ T^{k-3}\xi T \circ$$
$$\circ \mu T^{k-1} \circ T^{k-1}\xi = \ldots = \xi T^{k-2} \circ \ldots \circ \mu T^{k-1} \circ$$
$$\circ T^2 \xi T^{k-3} \circ \ldots \circ T^{k-2}\xi T \circ T^{k-1}\xi = T\mu T^{k-2} \circ$$
$$\circ \xi T^{k-1} \circ T\xi T^{k-2} \circ T^2\xi T^{k-3} \circ \ldots \circ T^{k-2}\xi T \circ$$
$$\circ T^{k-1}\xi = \tilde{\xi}_{k-1} \circ \mu T^{k-1}$$

/у передостанній рівності використана умова /*//.

Нехай тепер $\mathcal{C}$ – повна категорія. Індукцією за ординалом $\alpha \geq 1$ означимо ітерацію T^α функтора T і природні перетворення $\mu_{\alpha\beta} : T^\alpha \to T^\beta$, $\alpha \geq \beta$.

Приймемо $T^1 = T$, $T^{\alpha+1} = TT^\alpha$, $\mu_{\alpha\alpha} = 1_{T^\alpha}$, $\mu_{\alpha+2,\alpha+1} = \mu T^\alpha$. Якщо α – граничний ординал і для всіх α', β', $\alpha > \alpha' \geq \beta'$ означені $T^{\alpha'}$ і $\mu_{\alpha'\beta'}$, то приймаємо $(T^{\alpha}, \mu_{\alpha\alpha'}) = \varprojlim \{T^{\alpha'}, \mu_{\alpha'\beta'}; \alpha', \beta' < \alpha\}$. Неважко перевірити, що коректність такого означення випливає з асоціативності множення μ.

Позначимо через φ^{α} обернену систему $\{T^{\alpha'}X, \mu_{\alpha'\beta'}X; \alpha', \beta' < \alpha\}$. Нехай $\xi: T^2 \to T^2$ – природне перетворення, що задовольняє умову /*/ і асоційоване з деяким продовженням функтора T на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$. Для кожного $\alpha \geq 1$ означимо природне перетворення $\tilde{\xi}_{\alpha}: TT^{\alpha} \to T^{\alpha}T$, виходячи з умов:

1/ $\tilde{\xi}_1 = \xi$;

2/ якщо $\alpha = (\alpha-1)+1$, то $\tilde{\xi}_{\alpha} = \tilde{\xi}_{\alpha+1}T \circ T^{\alpha-1}\xi$;

3/ якщо $\beta' \leq \beta$, то діаграма

$$\begin{array}{ccc} T^{\beta}T & \xrightarrow{\tilde{\xi}_{\beta}} & TT^{\beta} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{\beta\beta'}T} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T\mu_{\beta\beta'}} \\ T^{\beta'}T & \xrightarrow{\tilde{\xi}_{\beta'}} & TT^{\beta'} \end{array}$$

комутативна /тобто для кожного X сім"я $\{\tilde{\xi}_{\beta}X \mid \beta < \alpha\}$ є морфізмом оберненої системи φ^{α}_{TX} в систему $T(\varphi^{\alpha}_X)$/ і $\tilde{\xi}_{\alpha}X = \varprojlim \{\tilde{\xi}_{\beta}X \mid \beta < \alpha\}$.

<u>Теорема 2.</u> Природне перетворення $\tilde{\xi}_{\alpha}$ асоційоване з продовженням функтора T^{α} на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

<u>Приклади.</u> 1. Для природного перетворення $\xi = \eta T \circ \mu: T^2 \to T^2$ виконана умова /*/.

2. Нехай $\mathbb{H} = (exp, s, u)$ – монада гіперпростору на категорії компактів $Comp$ [1]. Природне перетворення $t: exp^2 \to exp^2$, задане формулою $tX(\mathcal{A}) = \{B \in expX \mid B \subset uX(\mathcal{A}),\ B \cap A \neq \emptyset$ для всіх $A \in \mathcal{A}\}$ задовольняє умову /*/.

Дійсно, якщо $\mathfrak{A} \in exp^3 X$, тоді $tX \circ u\,expX(\mathfrak{A}) =$

$= \{B \in expX \mid B \subset uX \circ u\,expX(\mathfrak{A}),\ B \cap A \neq \emptyset$

для всіх $A \in \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$, $exp\,uX \circ t\,expX \circ exp\,tX(\mathfrak{A}) =$

$= \{uX(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in exp^2 X,\ \mathcal{B} \subset u\,expX \circ exp\,tX(\mathfrak{A}),$

$\mathcal{B} \cap tX(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ для всіх $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$.

Якщо $\mathcal{B} \in \exp^2 X$, $\mathcal{B} \subset u \exp X \circ \exp tX(\mathfrak{A})$ і $\mathcal{B} \cap tX(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ для всіх $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, то, припускаючи, що $uX(\mathcal{B}) \cap A_0 \neq \emptyset$ для деякого $A_0 \in \mathcal{A}_0 \in \mathfrak{A}$, одержуємо $\mathcal{B} \cap tX(\mathcal{A}_0) \neq \emptyset$. Але тоді для $C \in tX(\mathcal{A}_0) \cap \mathcal{B}$ маємо $C \cap A_0 \neq \emptyset$, що приводить до суперечності. Отже, $\exp uX \circ t \exp X \circ \exp tX(\mathfrak{A}) \subset$ $\subset tX \circ u \exp X(\mathfrak{A})$.

Щоб показати обернене включення, досить розглянути випадок скінченного X. Нехай $B \in tX \circ u \exp X(\mathfrak{A})$ і $\mathcal{B} = \{ B \cap uX(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{A} \}$, тоді $\mathcal{B} \in \exp^2 X$, $uX(\mathcal{B}) = B$ і $\mathcal{B} \cap tX(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ для всіх $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. Залишилося показати, що $\mathcal{B} \subset u \exp X \circ \exp tX(\mathfrak{A})$. Вибираючи $C_0 \in \mathcal{B}$, знаходимо $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{A}$ таке, що $C_0 =$ $= B \cap uX(\mathcal{A}_0)$. Тоді $C_0 \in tX(\mathcal{A}_0)$ і $C_0 \in$ $u \exp X \circ \exp tX(\mathfrak{A})$.

Принагідно хочу висловити подяку М.Я.Комарницькому, який ознайомив мене з цією тематикою.

1. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // Успехи мат. наук. 1986. Т.41. Вып. 6. С.121-159. 2. MacLane S. Categories for the working mathematician. Berlin, 1971. 3. Vinárek J. Projective monads and extensions of functors // Math. Centr. Afd. 1983. N 195. P.1-12.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90