УДК 515.12

Т.О.Банах

ПРО ОДИН КЛАС НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ МНОГОВИДІВ

Надалі $\mathcal{C}$ означатиме клас метричних компактів, $\mathcal{C}_{fd}$ – клас скінченновимірних компактів, l_2 – стандартний сепарабельний гільбертів простір.

Нехай $A \in \mathcal{C}$. Під похідною $A^{(1)}$ компакта A ми розуміємо множину $A^{(1)} = \{x \in A \mid$ існує окіл $U \ni x, \dim U < \infty\}$. Легко бачити, що $A^{(1)}$ – замкнена множина в компакті A. Індуктивно означимо n-ну похідну $A^{(n)}$ компакта A: $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^{(1)}$, $n > 1$. Зауважимо, що для похідної справедливі такі властивості, які виправдовують термін "похідна": $(A \times B)^{(1)} = (A^{(1)} \times B) \cup (A \times B^{(1)})$, $(A \cup B)^{(1)} = A^{(1)} \cup B^{(1)}$.

Розглянемо клас $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, A^{(n)} = \emptyset\}$. Очевидно, що $\mathcal{C}_{fd} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{C}$. Можна показати, що для компактів $A, B \in \mathcal{K}$ і замкненої множини $C \subset A$ виконуються умови: /i/ $A \times B \in \mathcal{K}$; /ii/ $A \cup B \in \mathcal{K}$; /iii/ $C \in \mathcal{K}$; /iy/ $A/C \in \mathcal{K}$. Розглянемо компакт $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset l_2$, де $K_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^n \times \{(0,0,\dots)\} \subset l_2$. Оскільки $K^{(1)} = \{*\} = \{(0,0,\dots)\}$, то $K \in \mathcal{K}$. Розглянемо пряму границю $K^{\infty} = \varinjlim \{K^n, i_n\}$, де $i_n : K^n \hookrightarrow K^{n+1}$ – вкладення, $i_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, *)$.

Нехай $\mathcal{D}$ – деякий клас просторів. Простір X будемо називати сильно універсальним для класу $\mathcal{D}$ /сильно $\mathcal{D}$-універсальним/, якщо для будь-якої пари (A, B), де $A, B \in \mathcal{D}$ і $B \subset A$ – замкнена множина, довільне вкладення $f : B \hookrightarrow X$ продовжується до вкладення $\bar{f} : A \hookrightarrow X$.

Відомо[*], що простір $\mathbb{R}^{\infty} = \varinjlim \mathbb{R}^n$ є сильно універсальним для класу $\mathcal{C}_{fd}$, а простір $Q^{\infty} = \varinjlim Q^n$ – сильно універсальним для класу $\mathcal{C}$.

<u>Теорема 1</u>. Простір K^{∞} є сильно універсальний для класу $\mathcal{K}$.

Доведемо спочатку деякі допоміжні твердження.

[*] Sakai K. On $\mathbb{R}^{\infty}$-manifolds and Q^{∞}-manifolds // Top. Appl. 1984. Vol.18. N1. P.69-80.

Лема 1. Нехай $A \in \mathcal{K}$, $A^{(1)} = \{*\}$, тоді існує вкладення $i: A \hookrightarrow K$.

Доведення. Нехай d – обмежена одиницею метрика на компакті A . Розглянемо множини $A_n = \{x \in A \mid 2^{-n} \le d(x,*) \le 2^{-n+1}\}, n \ge 1$. Очевидно, що $A \setminus \{*\} = \cup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ і $\dim A_n < \infty$, $n \ge 1$. Задамо рекурентно послідовність чисел $i(n): i(1) = 2\dim A_1 + 1$, $i(n+1) = i(n) + 2\dim(A_{n+1}/(A_n \cap A_{n+1})) + 1$. Побудуємо індуктивно послідовність вкладень $i_n: A_n \hookrightarrow K_{i(n)}$, $n \ge 1$, де $K_m = [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]^m \subset K$, так, щоб задовольнялись умови

$$(*_n) \quad i_n(A_n) \not\ni * \;;\; i_n(A_n \cap A_{n+1}) \subset K_{i(n+1)};$$
$$i_{n+1}| A_n \cap A_{n+1} = i_n | A_n \cap A_{n+1} \;;$$
$$i_{n+1}(x) \ne i_k(y),\ k \le n,\ y \in A_k,\ x \in A_{n+1},\ x \ne y .$$

Покажемо, як будувати крок індукції. Нехай $i_k: A_k \hookrightarrow K_{i(k)}$, $k \le n$, вже побудовані. Тоді $i_n(A_n \cap A_{n+1}) \subset K_{i(n)} \cap K_{i(n+1)}$. Оскільки $K_{i(n)} \cap K_{i(n+1)}$ – AR – компакт, то існує $f: A_{n+1} \to K_{i(n)} \cap K_{i(n+1)}$ – продовження відображення $i_n | A_n \cap A_{n+1}$. Причому f можна вибрати так, щоб $f(A_{n+1} \cap A_{n+2}) \subset K_{i(n)} \cap K_{i(n+2)}$. Нехай $\pi: A_{n+1} \to A_{n+1}/(A_{n+1} \cap A_n)$ – фактор-відображення і $j: A_{n+1}/(A_{n+1} \cap A_n) \hookrightarrow [-\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+2}]^{i(n+1)-i(n)}$ – вкладення, для якого $j(A_n \cap A_{n+1}) = \{(0,0,\dots)\}$. Приймемо $i_{n+1} = f \times (j \circ \pi): A_{n+1} \to (K_{i(n+2)} \cap K_{i(n)}) \times [-\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+2}]^{i(n+1)-i(n)} \subset K_{i(n+1)}$. Очевидно, що всі умови з $(*_{n+1})$ виконуються. Легко бачити, що відображення $i: A \to K$,

$$i(a) = \begin{cases} i_n(a) & \text{, якщо } a \in A_n , \\ (0,0,\dots) & \text{, якщо } a = * , \end{cases}$$

є шуканим вкладенням. Лема доведена.

Лема 2. Якщо для компакту A, $A^{(n+1)} = \emptyset$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, то існує вкладення $i: A \hookrightarrow K^{n+1}$, причому, якщо $x \in A$ – фіксована точка компакту A , то вкладення можна вибрати таким, що $i(x) = (*, \dots, *)$.

Доведення. Розглянемо послідовність $A \supset A^{(1)} \supset \dots A^{(n)} \supset A^{(n+1)} = \emptyset$. Нехай $x \in A^{(k)}$, $x \notin A^{(k+1)}$, $k \le n$.

Оскільки $A^{(n+1)} = \emptyset$, то компакт $A^{(n)}$ скінченновимірний та існує вкладення $i_n: A^{(n)} \hookrightarrow K$ /якщо $x \in A^{(n)}$, то $i_n(x) = *$, якщо $x \notin A^{(n)}$, то $i_n(A^{(n)}) \not\ni *$ /. Оскільки $K \in AR$, то існує $\bar{i}_n : A^{(n-1)} \to K$ – продовження відображення i_n. Розглянемо компакт $A^{(n-1)}/A^{(n)}$. Для нього перша похідна складається з однієї точки $\{A^{(n)}\}$, тому, за щойно доведеною лемою, існує вкладення $j : A^{(n-1)}/A^{(n)} \hookrightarrow K$, $j(A^{(n)}) = *$. Прийнявши $i_{n-1} = \bar{i}_n \times (j \circ \pi) : A^{(n-1)} \to K^2$, де $\pi : A^{(n-1)} \to A^{(n-1)}/A^{(n)}$ – фактор-відображення, одержимо вкладення компакту $A^{(n-1)}$ в K^2. Продовжуючи цю процедуру, отримаємо вкладення $i_{K+1} : A^{(K+1)} \hookrightarrow K^{n-K}$ таке, що $i_{K+1}(A^{(K+1)}) \not\ni (*,\dots,*)$. Оскільки $K^{n-K} \in AR$, то існує $\bar{i}_{K+1} : A^{(K)} \hookrightarrow K^{n-K}$ – продовження відображення i_{K+1} таке, що $\bar{i}_{K+1}(x) = (*,\dots,*)$. Використовуючи вкладення $j : A^{(K)}/(A^{(K+1)} \cup \{x\}) \hookrightarrow K$, $j(A^{(K+1)} \cup \{x\}) = *$, будуємо вкладення $i_K : A^{(K)} \hookrightarrow K^{n-K+1}$, що продовжує i_{K+1}. Продовжуючи цей процес, отримуємо вкладення $i : A \hookrightarrow K^{n+1}$, для якого $i(x) = (*,\dots,*)$. Лема доведена.

Повернемось тепер до доведення теореми 1. Нехай $A \in \mathcal{K}$, $B \subset A$ і $f : B \hookrightarrow K^\infty$ – вкладення. Існує номер $n \in \mathbb{N}$ такий, що $f(B) \subset K^n$. Оскільки $K^n \in AR$, то існує продовження $\bar{f} : A \to K^n$ відображення f. Розглянемо фактор-відображення $\pi : A \to A/B$. Оскільки $A/B \in \mathcal{K}$, то, за лемою 2, існує вкладення $j : A/B \hookrightarrow K^m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$, причому $j(B) = (*,\dots,*)$. Відображення $g = \bar{f} \times (j \circ \pi) : A \to K^n \times K^m \subset K^\infty$ – шукане вкладення, що продовжує вкладення f. Теорема доведена.

Використовуючи сильну $\mathcal{K}$ – універсальність простору K^∞, стандартною технікою доводимо таке твердження:

Теорема 2. Будь-який гомеоморфізм між компактними підмножинами простору K^∞ продовжується до автогомеоморфізму K^∞.

Наслідок 1. Простір K^∞ топологічно однорідний.

Теорема 3. Простір K^∞ має базу з множин, гомеоморфних K^∞ /тобто K^∞ – локально собі подібний/.

Доведення. Оскільки простір K^∞ топологічно однорідний, достатньо показати, що для будь-якого околу $U \ni *$ існує окіл $V \subset U$ такий, що $\bar{V} \cong K^\infty$, але це очевидно.

Наслідок 2. Кожен простір $A \in \mathcal{K}$ зображається у вигляді об"єднання скінченновимірних компактів.

Оскільки простір K^∞ топологічно однорідний і локально подібний собі, можна розглядати многовиди, модельовані на просторі K^∞.

Теорема 4. Характеризація K^∞ – многовидів. Простір $X \in AE(\mathcal{E})$ $(ANE(\mathcal{E}))$ гомеоморфний K^∞ / K^∞ – многовиду/

тоді і тільки тоді, коли:

$$X = \lim_{\longrightarrow} X_i \ , \ X_i \in \mathcal{K} ; \qquad /1/$$

X – сильно універсальний для класу $\mathcal{K}$ /2/.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.90

УДК 539.377:536.12

І.І.Верба

РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НАПІВБЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ У ПЕРЕМІЩЕННЯХ

Щоб перевірити ефективність методу продовження функцій при розв"язуванні задач термопружності в переміщеннях, розглянемо статичну задачу термопружності для тонкої напівбезмежної $x_1 \geqslant 0$ ізотропної пластинки з тепловіддачею, що допускає розв"язок у явному вигляді.

Припустимо, що на поверхні $x_1 = 0$ задана температура $t_0 f(x_2)$. Тоді для визначення стаціонарного температурного поля в пластинці маємо першу граничну задачу для рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} - \varkappa^2 T = 0,$$

$$T\big|_{x_1=0} = t_0 f(x_2),$$

$$T\big|_{(x_1,x_2)\to\infty}, \ \frac{\partial T}{\partial x_i}\bigg|_{(x_1,x_2)\to\infty} \to 0 \quad (i=1,2).$$

Використовуючи перетворення Фур"є по x_2, розв"язок задачі теплопровідності запишемо у вигляді

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x_2)}\, e^{-i\eta x_2 - \gamma x_1}\, d\eta ,$$

де $\overline{f(x_2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2)\, e^{i\eta x_2}\, dx_2 \ , \ \gamma = \sqrt{\eta^2 + \varkappa^2}$.

Знайдемо розв"язок задачі термопружності у переміщеннях. Компоненти переміщень точок серединної площини пластинки u_1, u_2 задовольняють рівняння

$$\frac{2}{1+\nu} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{i\pm1}^2} + \frac{\partial^2 u_{i\pm1}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2 d_t \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i=1,2), \qquad /1/$$