тоді і тільки тоді, коли:

$$X = \underset{\longrightarrow}{\lim} X_i \ , \ X_i \in \mathcal{K} ; \qquad /1/$$

X – сильно універсальний для класу $\mathcal{K}$ /2/.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.90

УДК 539.377:536.12

І.І.Верба

РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НАПІВБЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ У ПЕРЕМІЩЕННЯХ

Щоб перевірити ефективність методу продовження функцій при розв"язуванні задач термопружності в переміщеннях, розглянемо статичну задачу термопружності для тонкої напівбезмежної $x_1 \geqslant 0$ ізотропної пластинки з тепловіддачею, що допускає розв"язок у явному вигляді.

Припустимо, що на поверхні $x_1 = 0$ задана температура $t_0 f(x_2)$. Тоді для визначення стаціонарного температурного поля в пластинці маємо першу граничну задачу для рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} - \varkappa^2 T = 0,$$

$$T\big|_{x_1 = 0} = t_0 f(x_2),$$

$$T\big|_{(x_1, x_2) \to \infty}, \ \frac{\partial T}{\partial x_i}\bigg|_{(x_1, x_2) \to \infty} \to 0 \ \ (i = 1, 2).$$

Використовуючи перетворення Фур"є по x_2, розв"язок задачі теплопровідності запишемо у вигляді

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x_2)}\, e^{-i\eta x_2 - \gamma x_1} d\eta ,$$

де $\overline{f(x_2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2) e^{i\eta x_2} dx_2 \ , \ \gamma = \sqrt{\eta^2 + \varkappa^2}$.

Знайдемо розв"язок задачі термопружності у переміщеннях. Компоненти переміщень точок серединної площини пластинки u_1, u_2 задовольняють рівняння

$$\frac{2}{1+\nu} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{i\mp 1}^2} + \frac{\partial^2 u_{i\pm 1}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2 d_t \frac{\partial T}{\partial x_i} \ \ (i = 1, 2), \qquad /1/$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення, $i \pm 1 = \begin{cases} 2, & i=1; \\ 1, & i=2. \end{cases}$

Нехай пластинка вільна від зовнішнього навантаження, тобто

$$\sigma_{11}\Big|_{x_1=0} = \sigma_{12}\Big|_{x_1=0} = 0, \qquad /2/$$

де компоненти тензора напружень σ_{ij} пов"язані з компонентами вектора переміщень u_i співвідношеннями Дюгамеля-Неймана

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial u_{i\pm1}}{\partial x_{i\pm1}} - (1+\nu)\alpha_t T\right] \quad (i=1,2), \\ \sigma_{12} &= G\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \end{aligned}\right\} \qquad /3/$$

G – модуль зсуву.

Крім того, припустимо, що на безмежності функції u_i і їх перші похідні прямують до нуля.

Застосовуючи перетворення Фур"є по x_2, для трансформант вектора переміщень $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ одержимо рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \eta^2\right)^2 \bar{u}_1 = (1+\nu)\alpha_t \varkappa^2 \frac{d\bar{T}}{dx_1},$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \eta^2\right)^2 \bar{u}_2 = (1+\nu)\alpha_t \varkappa^2 i\eta \bar{T} \qquad /4/$$

і граничні умови

$$\bar{\sigma}_{11}\Big|_{x_1=0} = \bar{\sigma}_{12}\Big|_{x_1=0} = 0, \qquad /5/$$

де $\bar{u}_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_i e^{i\eta x_2}\, dx_2$, $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{ij} e^{i\eta x_2}\, dx_2$.

З урахуванням умов на безмежності розв"язок граничної задачі /4/, /5/ запишеться у вигляді

$$\bar{u}_1 = \frac{\alpha_t t_0 \bar{f}(x_2)}{\varkappa^2}\Big\{\big[2|\eta| - (1-\nu)\gamma - (1+\nu)|\eta|(\gamma - |\eta|)x_1\big]e^{-|\eta| x_1} - (1+\nu)\gamma e^{-\gamma x_1}\Big\},$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\alpha_t t_0 \bar{f}(x_2)}{\varkappa^2} i \left\{ \left[(1-\nu)|\eta| - 2\gamma + (1+\nu)|\eta| (\gamma - |\eta|) x_1 \right] e^{-|\eta| x_1} + (1+\nu)|\eta| e^{-\gamma x_1} \right\} . \qquad /6/$$

Розв"язок граничної задачі /1/, /2/ знайдемо, використовуючи обернене перетворення Фур"є

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}_i e^{-i\eta x_2} d\eta \quad (i = 1,2). \qquad /7/$$

Знайдемо розв"язок задачі термопружності /1/, /2/ методом продовження функцій [1] і покажемо, що при $x_1 = 0$ він збігається з /7/. Вводимо в розгляд узагальнені функції $\mathcal{U}_i$, що збігаються з u_i при $x_1 \geq 0$ і дорівнюють нулю при $x_1 < 0$

$$\mathcal{U}_i = u_i S_-(x_1) ,$$

де $S_-(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0 ; \\ 0, & x_1 < 0 . \end{cases}$

Використовуючи правила диференціювання узагальнених функцій, граничні умови /2/ на поверхні $x_1 = 0$, систему рівнянь рівноваги /1/ у просторі узагальнених функцій запишемо у такому вигляді:

$$\frac{2}{1+\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|_{x_1=0} \delta_-(x_1) +$$

$$+ \frac{2}{1+\nu} u_1\Big|_{x_1=0} \delta_-'(x_1) + 2\alpha_t \left[\frac{\partial T}{\partial x_1} S_-(x_1) + T\Big|_{x_1=0} \delta_-(x_1) \right] ,$$

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_2}{\partial x_1^2} + \frac{2}{1+\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big|_{x_1=0} \delta_-(x_1) + \qquad /8/$$

$$+ \frac{1-\nu}{1+\nu} u_2\Big|_{x_1=0} \delta_-'(x_1) + 2\alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_2} S_-(x_1) ,$$

де $\delta_-(x_1) = \dfrac{dS_-(x_1)}{dx_1}$, $\delta_-'(x_1) = \dfrac{d\delta_-(x_1)}{dx_1}$ – відповідно асиметричні дельта-функція та її перша похідна [2].

За допомогою перетворення Фур"є по x_2 для трансформант $\bar{\mathcal{U}}_i$ одержимо рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \eta^2 \right)^2 \bar{\mathcal{U}}_1 = A_1 \delta_-'''(x_1) - \nu i \eta A_2 \delta_-''(x_1) - (\nu+2)\eta^2 A_1 \delta_-'(x_1) -$$

$$-i\eta^3 A_2 \delta_-(x_1) + a\left[-\gamma \varkappa^2 e^{-\gamma x_1} S_-(x_1) + \varkappa^2 \delta_-(x_1) - \gamma \delta_-'(x_1) + \delta_-''(x_1)\right],$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \eta^2\right)^2 \bar{\mathcal{U}}_2 = A_2 \delta_-'''(x_1) - i\eta A_1 \delta_-''(x_1) + \nu\eta^2 A_2 \delta_-'(x_1) -$$

$$-\nu i\eta^3 A_1 \delta_-(x_1) + a i\eta\left[\varkappa^2 e^{-\gamma x_1} S_-(x_1) - \gamma \delta_-(x_1) + \delta_-'(x_1)\right], \qquad /9/$$

де $A_1 = \bar{u}_1\big|_{x_1=0}$, $A_2 = \bar{u}_2\big|_{x_1=0}$, $a = (1+\nu)\alpha_t t_0 \overline{f(x_2)}$.

Розв"язки рівнянь /9/ з урахуванням умов на безмежності мають вигляд

$$\bar{\mathcal{U}}_1 = \frac{\alpha_t t_0 \overline{f(x_2)}}{2\varkappa^2}\Big\{\Big[\big(2|\eta| - (1-\nu)\gamma\big)(1 + sign_- x_1) - (1+\nu)|\eta| \times$$

$$\times (\gamma - |\eta|)(|x_1|_- + x_1)\Big] e^{-|\eta||x_1|_-} - 2(1+\nu)\gamma e^{-\gamma x_1} S_-(x_1)\Big\},$$

$$\bar{\mathcal{U}}_2 = \frac{\alpha_t t_0 \overline{f(x_2)}}{2\varkappa^2} i \Big\{\Big[\big((1-\nu)|\eta| - 2\gamma\big)(1 + sign_- x_1) + (1+\nu)|\eta| \times \qquad /10/$$

$$\times (\gamma - |\eta|)(|x_1|_- + x_1)\Big] e^{-|\eta||x_1|_-} + 2(1+\nu)|\eta| e^{-\gamma x_1} S_-(x_1)\Big\},$$

де $sign_- x_1 = 2S_-(x_1) - 1$, $|x_1|_- = x_1\, sign_- x_1$.

З отриманого результату бачимо, що трансформанти Фур"є $\bar{\mathcal{U}}_i$ та $\bar{u}_i$ зв"язані таким чином:

$$\bar{\mathcal{U}}_i = \begin{cases} \bar{u}_i, & x_1 \geq 0; \\ 0, & x_1 = 0. \end{cases}$$

Враховуючи формули /7/, аналогічні рівності можна записати і для оригіналів $\mathcal{U}_i$ та u_i.

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1976. 2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 17.10.90