УДК 517.433:530.145

П.І.Тацуняк

РОЗВ"ЯЗОК РІВНЯНЬ ВЕКТОРНО-СКАЛЯРНОЇ МОДЕЛІ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ І ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛУ ВАЙТМАНА

Для ілюстрації аксіоматичного методу Вайтмана у квантовій теорії поля розглянемо модель взаємодії векторного поля з похідною скалярного поля, яка задається лагранжіаном $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{вз}$

$$\mathcal{L}_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu}+M^2U_\mu U^\mu+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}+m^2\varphi^2\right), \qquad /1/$$

$$\mathcal{L}_{вз}=\lambda\left(U^\mu\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\varphi U^\mu\right), \qquad /1а/$$

де $U(U_1,U_2,U_3,U_0)$ – 4-вектор оператора векторного поля; φ – оператор скалярного поля; λ – константа взаємодії. Метрика задається тензором

$$g^{11}=g^{22}=g^{33}=-g^{00}=1; \quad g^{\mu\nu}=0,\ \mu\neq\nu\ (\mu,\nu=1,2,3,0). \qquad /3/$$

Повторення індексу означає суму. Для спрощення запису знак суми і метричний тензор не пишуться, наприклад:

$$\sum_{\mu,\nu}g^{\mu\nu}x_\mu y_\nu\equiv x^\mu y_\mu=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_0y_0=xy=\bar{x}\bar{y}-x_0y_0\,. \qquad /4/$$

Для забезпечення додатності тензора енергії векторне поле повинно задовольняти умову Лоренца [1]:

$$\frac{\partial U^\mu}{\partial x_\mu}=0. \qquad /5/$$

Рівняння поля моделі одержуються із /1/, /1а/, з урахуванням виразу /5/ як рівняння Ейлера:

$$(\Box-M^2)U_\mu(x)=j_\mu(x); \qquad /6/$$

$$(\Box-m^2)\varphi(x)=0, \qquad /7/$$

де $j_\mu=\lambda\left[\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right]_+=\lambda\frac{\partial}{\partial x_\mu}:\varphi^2(x):$ /6а/

Символ :: означає нормальний добуток польових операторів за Віком [1]: $:\varphi^2(x):=\lim_{y\to x}[\varphi(x)\varphi(y)-\Delta^+(x-y;m^2)$, /8/

де Δ^+ додатно-частотна сингулярна функція квантової теорії поля:

$$\Delta^+(x;m^2)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int dp\,\theta(p_0)\,\delta(p^2+m^2)\,e^{ipx}\,. \qquad /9/$$

Польові оператори задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$[U_\mu^{in}(x),U_\nu^{in}(x')]_-=i\Delta^+_{\mu\nu}(x-x';M^2)=i\left(g^{\mu\nu}+\frac{1}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\right)\Delta^+(x-x';M^2); \qquad /10/$$

$$[U_\mu(x),U_\nu(x')]_-=0;\quad (x-x')^2>0; \qquad /11/$$

$$[U_\mu^{in}(x),\varphi(x')]_-=0\ ;\ (\Box-M)U_\mu^{in}(x)=0\,; \qquad /12/$$

$$[\varphi(x),\varphi(x')]_-=i\Delta^+(x-x';m^2)\,. \qquad /13/$$

Беручи дивергенцію з обох боків у рівнянні /6/ і враховуючи /5/, одержуємо $(\Box-M^2)\dfrac{\partial U_\mu}{\partial x^\mu}=\dfrac{\partial j_\mu}{\partial x^\mu}=0$, звідки для дивергенції струму маємо умову

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x^\mu}=0 \qquad /14/$$

як результат умови Лоренца /5/.

Розв"язок системи /6/, /7/ з урахуванням /14/ одержуємо за допомогою формули

$$U_\mu(x)=U_\mu^{in}(x)+\int dx'\Delta^r_{\mu\nu}(x-x';M^2)j^\nu(x'), \qquad /15/$$

де U_μ^{in} – оператор невзаємодіючого поля; $\Delta^r_{\mu\nu}$ – запізнювальна функція Гріна векторного поля:

$$\Delta^r_{\mu\nu}(x;M^2)=\left(g^{\mu\nu}+\frac{1}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\right)\Delta^r(x;M^2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{dk\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{M^2}\right)}{k^2+M^2-2i\varepsilon k_0}\,e^{ikx} \qquad /16/$$

і де

$$\Delta^r(x;M^2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{dk\,e^{ikx}}{k^2+M^2-2i\varepsilon k_0}\,, \qquad /17/$$

що задовольняє рівняння $(\Box-M^2)\Delta^r(x;M^2)=\delta(x)$. /17a/

Підставляючи /15/ у /6/

$$(\Box - M^2)U^{in}_{\mu\nu}(x) + \int dx'\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)(\Box - M^2)\Delta^r(x-x';M^2)\,j_\nu(x') = j^\mu(x),$$

і враховуючи далі /12/ і /17a/, одержуємо

$$0 + \left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\int dx'\delta(x-x')\bar{j}_\nu(x') = \bar{j}^\mu(x).$$

Після інтеграції беремо дивергенцію з огляду на /14/ одержуємо остаточно

$$-\frac{1}{M^2}(\Box - M^2)\frac{\partial j_\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial j_\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Отже, /15/ з точністю до дивергенції є розв"язком системи /6/, /7/.

Тепер за допомогою розв"язку /15/ обчислимо функціонал Вайтмана другого порядку [5]:

$$W_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2) = \langle U_{\mu_1}(x_1)U_{\mu_2}(x_2)\rangle_0 = \langle U^{in}_{\mu_1}(x_1)U^{in}_{\mu_2}(x_2)\rangle_0 +$$

$$+\lambda^2\int dx_1'dx_2'\,\Delta^r_{\mu_1\nu_1}(x_1-x_1';M^2)\Delta^r_{\mu_1\nu_1}(x_2-x_2';M^2)\langle \bar{j}^{\nu_1}(x_1')j^{\nu_2}(x_2')\rangle_0, \quad /18/$$

де $\langle\,\rangle_0$ означає середнє за вакуумом у просторі станів Фока [1].

Для функціонала невзаємодіючого поля, враховуючи /9/ і /10/, маємо

$$W^{in}_{\mu_1\mu_2} = \langle U^{in}_{\mu_1}(x_1)U^{in}_{\mu_2}(x_2)\rangle_0 = i\Delta^+_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2;M^2) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int dp\,\theta(p_0)\left(g^{\mu_1\mu_2} - \frac{p^{\mu_1}p^{\mu_2}}{M^2}\right)\delta(p^2+M^2)e^{ip(x_1-x_2)} \quad /19/$$

або

$$g^{\mu_1\mu_2}W^{in}_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2) = 3i\Delta^+(x_1-x_2;M^2). \quad /20/$$

Для обчислення другого доданка у /18/ розглянемо окремо

$$\langle \bar{j}^{\nu_1}(x_1)j^{\nu_2}(x_2)\rangle_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}}\,\omega(x_1;x_2), \quad /21/$$

де, враховуючи теорему Віка, із /8/ одержимо

$$\omega(x_1;x_2) = \langle :\varphi(x_1)\varphi(x_1)::\varphi(x_2)\varphi(x_2):\rangle_0 = -2\left[\Delta^+(x_1-x_2;m^2)\right]^2. \quad /21a/$$

Вираз $[\Delta^+(x;m^2)]^2$ обчислений В.Тіррінгом [4]:

$$[\Delta^+(x;m^2)]^2 = \frac{1}{(4\pi)^2 i}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\,\Delta^+(x;c). \quad /22/$$

Враховуючи /16/, /21/, /21а/ і /22/, у другому доданку /18/ маємо

$$\frac{2i\lambda^2}{(2\pi)^4(4\pi)^2}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\int\frac{dk_1dk_2\left(g^{\mu_1\nu_1}-\frac{k^{\mu_1}k^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}-\frac{k^{\mu_2}k^{\nu_2}}{M^2}\right)}{(k_1^2+M^2-2i\varepsilon k_{10})(k_2^2+M^2-2i\varepsilon k_{20})}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial x'_{\nu_1}\partial x'_{\nu_2}}\Delta^+(x'_1-x'_2;c)\,dx'_1dx'_2=\frac{2\lambda^2}{(2\pi)^5(4\pi)^2}\int\frac{dk_1dk_2\left(g^{\mu_1\nu_1}-\frac{k^{\mu_1}k^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}-\frac{k^{\mu_2}k^{\nu_2}}{M^2}\right)}{(k_1^2+M^2-2i\varepsilon k_{10})(k_2^2+M^2-2i\varepsilon k_{20})}\times$$

$$\times\int dp\,\theta(p_0)p_{\nu_1}p_{\nu_2}\,\delta(p^2+c)\int dx'_1dx'_2\,e^{i[k_1(x_1-x'_1)+k_2(x_2-x'_2)+p(x'_1-x'_2)]}=$$

$$=\frac{2\lambda^2}{(2\pi)^3(4\pi)^2}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\int dp\,\theta(p_0)p_{\nu_1}p_{\nu_2}\,\delta(p^2+c)\,e^{ip(x_1-x_2)}\times$$

$$\times\int dk_1dk_2\frac{\left(g^{\mu_1\nu_1}-\frac{k^{\mu_1}k^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}-\frac{k^{\mu_2}k^{\nu_2}}{M^2}\right)}{(k_1^2+M^2-2i\varepsilon k_{10})(k_2^2+M^2-2i\varepsilon k_{20})}\,\delta(k_1-p)\,\delta(k_2+p)=$$

$$=\frac{2\lambda^2}{(2\pi)^3(4\pi)^2}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\int dp\,\theta(p_0)\frac{\left(g^{\mu_1\nu_1}+\frac{p^{\mu_1}p^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}+\frac{p^{\mu_2}p^{\nu_2}}{M^2}\right)}{(p^2+M^2)^2+4\varepsilon^2p_0^2}p_{\nu_1}p_{\nu_2}\,\delta(p^2+c)\,e^{ip(x_1-x_2)}.\qquad /23/$$

Окремо обчислимо множник, який відповідає компонентам функціоналу Вайтмана

$$W_{\mu_1\mu_2}\sim\left(g^{\mu_1\nu_1}+\frac{p^{\mu_1}p^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}+\frac{p^{\mu_2}p^{\nu_2}}{M^2}\right)p_{\nu_1}p_{\nu_2}=$$

$$=g^{\mu_1\nu_1}g^{\mu_2\nu_2}p_{\nu_1}p_{\nu_2}+2\frac{p^{\mu_1}p^{\mu_2}}{M^2}p^2+\frac{p^{\mu_1}p^{\mu_2}}{M^4}p^4=\frac{p^{\mu_1}p^{\mu_2}}{M^4}(M^2+p^2)^2.$$

Сума діагональних компонент функціоналу /слід/ має зручний лоренц-інваріантний вигляд

$$g^{\mu_1\mu_2}W_{\mu_1\mu_2}=W_{11}+W_{22}+W_{33}-W_{00}\sim\frac{p^2}{M^4}(p^2+M)^2.\qquad /24/$$

Враховуючи /24/ у /23/ і повертаючись до /18/ разом із /19/, одержуємо

$$g^{\mu_1\mu_2}W_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2)=3i\Delta^+(x_1-x_2;\,M^2)+$$

$$+\frac{2\lambda^2}{(2\pi)^3(4\pi)^2}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\int\frac{dp\,\theta(p_0)p^2(p^2+M^2)^2}{M^4(p^2+M^2)^2}\delta(p^2+c)e^{ip(x_1-x_2)}=$$

$$=3i\Delta^+(x_1-x_2;M^2)-\frac{2i\lambda^2}{(4\pi)^2M^4}\int\limits_{4m^2}^{\infty}dc\sqrt{c(c-4m^2)}\,\Delta^+(x_1-x_2;c)=$$

$$=i\int\limits_0^{\infty}dc\left[3\delta(c-M^2)-\frac{\lambda^2\theta(c-4m^2)}{2(2\pi)^2M^4}\sqrt{c(c-4m^2)}\right]\Delta^+(x_1-x_2;c),$$

що є представленням Лемана [2] для функціоналу Вайтмана другого порядку

$$g^{\mu_1\mu_2}W_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2)=i\int\limits_0^{\infty}dc\,\varrho(c)\,\Delta^+(x_1-x_2;c),\qquad /25/$$

$$\varrho(c)=3\delta(c-M^2)-\frac{\lambda^2\theta(c-4m^2)}{2(2\pi)^2M^4}\sqrt{c(c-4m^2)},\qquad /25а/$$

де $\varrho(c)$ – спектральна функція представлення. Носій спектральної функції складається з однієї ізольованої точки $c=M^2$ за умови $M<2m$ і неперервної частини $c\geqslant 4m^2$. Така модель фізично можлива, тому що описує щонайменш одну стабільну частинку маси M.

У випадку двовимірної моделі, яка визначається метричним тензором $g^{11}=-g^{00}=1;\ g^{\mu\nu}=0,\ \mu\neq\nu\ (\mu,\nu=1,0)$, представлення /25/ має спектральну функцію виду

$$\varrho(c)=\delta(c-M^2)-\frac{\lambda^2\theta(c-4m^2)c}{2\pi M^4\sqrt{c(c-4m^2)}},\qquad /25б/$$

для обчислення якої використано вираз $[\Delta^+(x;c)]^2$ із праці [3].

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1976. 2. Леман Г. О свойствах функций распространения и констант перенормировки квантованных полей // Проблемы современной физики. М., 1955. С.133-

144. 3. Т а ц у н я к П.І. Множення додатно-частотних функцій Гріна двовимірної квантової теорії поля // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 32. С.35-38. 4. Т и р р и н г В.Е. Принципы квантовой электродинамики. М., 1964. С.209.
5. Wightman A.S. Quantum fields theory in terms of vacuum expectation values // Phys. Rev. 1956. Vol.101. N1. P. 860.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.90

УДК 539.377:536.12

І.М.Колодій, Б.В.Ковальчук, І.І.Верба, І.Т.Горинь

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РОТЕ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ОДНОРІДНИХ ТІЛ

Розглянемо задачу про охолодження однорідного шару товщиною $2l$, нагрітого до високої температури t_0, порядку 2000 °С. Через поверхні шару $x = \pm l$ здійснюється теплообмін з зовнішнім середовищем температури $g(\tau)$ за законом Ньютона. Тоді у випадку симетрії задачі щодо поверхні $x = 0$ для визначення нестаціонарного температурного поля в шарі матимемо задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right) = c(t)\frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad t = t(x,\tau); \qquad /1/$$

$$t\big|_{\tau=0} = t_0; \qquad /2/$$

$$\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,$$

$$\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=l} = -\alpha(t-g(\tau))\Big|_{x=l}, \qquad /3/$$

де $\lambda(t)=\lambda_0 t^{\nu}$, $c(t)=c_0 t^{\nu}$, $\nu \geq 0$.

Після заміни $T = t^{\nu+1}$ для знаходження T отримаємо крайову задачу з нелінійними граничними умовами на поверхні

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad T = T(X, Fo); \qquad /4/$$