144. 3. Тацуняк П.І. Множення додатно-частотних функцій Гріна двовимірної квантової теорії поля // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 32. С.35-38. 4. Тирринг В.Е. Принципы квантовой электродинамики. М., 1964. С.209. 5. Wightman A.S. Quantum fields theory in terms of vacuum expectation values // Phys. Rev. 1956. Vol.101. N1. P.860.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.90

УДК 539.377:536.12

І.М.Колодій, Б.В.Ковальчук, І.І.Верба, І.Т.Горинь

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РОТЕ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ОДНОРІДНИХ ТІЛ

Розглянемо задачу про охолодження однорідного шару товщиною $2l$, нагрітого до високої температури t_0, порядку 2000 °С. Через поверхні шару $x = \pm l$ здійснюється теплообмін з зовнішнім середовищем температури $g(\tau)$ за законом Ньютона. Тоді у випадку симетрії задачі щодо поверхні $x = 0$ для визначення нестаціонарного температурного поля в шарі матимемо задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right) = c(t)\frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad t = t(x,\tau); \qquad /1/$$

$$t\big|_{\tau=0} = t_0; \qquad /2/$$

$$\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,$$

$$\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=l} = -\alpha(t-g(\tau))\Big|_{x=l}, \qquad /3/$$

де $\lambda(t)=\lambda_0 t^{\nu}$, $c(t)=c_0 t^{\nu}$, $\nu \geq 0$.

Після заміни $T = t^{\nu+1}$ для знаходження T отримаємо крайову задачу з нелінійними граничними умовами на поверхні

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad T = T(X, Fo); \qquad /4/$$

$$T\big|_{Fo=0}=0, \qquad /5/$$

$$\frac{\partial T}{\partial X}\Big|_{X=0}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial X}\Big|_{X=1}=-Bi(\nu+1)\left(T^{\frac{1}{\nu+1}}(X,Fo)-T_c\right)\Big|_{X=1}, \qquad /6/$$

де $T_0=t_0^{\nu+1}$; $T_c=g\left(c_0\frac{l^2}{\lambda_0}Fo\right)$; $X=\frac{x}{l}$ – безрозмірна координата; $Bi=\frac{\alpha l}{\lambda_0}$ – критерій Біо; $Fo=\frac{\lambda_0\tau}{C_0 l^2}$ – критерій Фур"е.

Задачу /4/–/6/ розв"язуємо методом Роте [3]. Розіб"ємо проміжок $[0, Fo^*]$ зміни Fo на n рівних частин точками $Fo_k=kh$, $h=\frac{Fo^*}{n}$, $k=0,1,\ldots,n$. У рівнянні /4/ приймемо $Fo=Fo_{k+1}$ і похідну по Fo замінимо на різницеву. В результаті отримаємо звичайні диференціальні рівняння для функцій $T_{k+1}(X)$, які є наближеними значеннями функції $T(X,Fo_{k+1})$

$$\frac{d^2T_{k+1}(X)}{dX^2}=\frac{T_{k+1}(X)-T_k(X)}{h}. \qquad /7/$$

Функцію $T_0(X)$ задовольнимо початковій умові /5/

$$T_0(X)=T_0 . \qquad /8/$$

Решту $T_{k+1}(X)$ задовольнятимуть умови /6/

$$\frac{dT_{k+1}(X)}{dX}\Big|_{X=0}=0,$$

$$\frac{dT_{k+1}(X)}{dX}\Big|_{X=1}=-Bi(\nu+1)\left(T_{k+1}^{\frac{1}{\nu+1}}(X)-T_{c,k+1}\right)\Big|_{X=1}, \qquad /9/$$

де $T_{c,k+1}=g\left(\frac{\lambda_0 l^2}{C_0}Fo_{k+1}\right)$.

Нами запропоновано в граничних умовах /9/ справа замість $T_{k+1}^{\frac{1}{\nu+1}}(X)$ використовувати інформацію попереднього шару, тобто $T_{k+1}^{\frac{1}{\nu+1}}(X)$ замінити на $T_k^{\frac{1}{\nu+1}}(X)$, що дає змогу отримати лінійні /на відміну від нелінійних /9// граничні умови /7/

з початковими умовами /8/

$$\left.\frac{dT_{K+1}(X)}{dX}\right|_{X=0}=0,$$

$$\left.\frac{dT_{K+1}(X)}{dX}\right|_{X=1}=-Bi(\nu+1)\left(T_K^{\frac{1}{\nu+1}}(X)-T_{C,K+1}\right)\Big|_{X=1}. \qquad /10/$$

Такий підхід ми назвали метод Роте з запізненням. Отже, розв'язування задачі /4/–/6/ методом Роте приводить до розв"язування послідовності граничних задач для лінійного рівняння з нелінійними граничними умовами /7/–/9/, а методом Роте з запізненням – до послідовності лінійних граничних задач /7/, /8/, /10/.

Підставимо в рівняння /7/ $K=0$. Оскільки $T_0(X)$ відоме з /8/, то знайдемо $T_1(X)$, розв"язок рівняння /7/, що задовольняє умову /9/ або /10/. Потім підставимо в /7/ $K=1$ і знайдемо $T_2(X)$ і т.д.

Загальний розв"язок рівняння /7/ має вигляд

$$T_{K+1}(X)=A_{K+1}ch\frac{X}{\sqrt{h}}+B_{K+1}sh\frac{X}{\sqrt{h}}+\frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^X T_K(\xi)sh\frac{\xi-X}{\sqrt{h}}d\xi. \qquad /11/$$

Задовольнивши граничні умови /9/ або /10/, отримаємо відповідно

$$B_{K+1}=0,$$

$$A_{K+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{h}}sh\frac{1}{\sqrt{h}}\right)^{-1}\Bigg[\frac{1}{h}\int_0^1 T_K(\xi)ch\frac{\xi-1}{\sqrt{h}}d\xi-$$

$$-Bi(\nu+1)\left(\left(A_{K+1}ch\frac{1}{\sqrt{h}}+\frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^1 T_K(\xi)sh\frac{\xi-1}{\sqrt{h}}d\xi\right)^{\frac{1}{\nu+1}}-T_{C,K+1}\right)\Bigg]; \qquad /12/$$

$$B_{K+1}=0,$$

$$A_{K+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{h}}sh\frac{1}{\sqrt{h}}\right)^{-1}\Bigg[\frac{1}{h}\int_0^1 T_K(\xi)ch\frac{\xi-1}{\sqrt{h}}d\xi-$$

$$-Bi(\nu+1)\left(T_K^{\frac{1}{\nu+1}}(1)-T_{C,K+1}\right)\Bigg]. \qquad /13/$$

Отже, розв"язок методом Роте і методом Роте з запізненням має вигляд

$$T_{k+1}(X) = A_{k+1}\, ch\frac{X}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^X T_k(\xi)\, sh\frac{\xi - X}{\sqrt{h}}\, d\xi . \qquad /14/$$

Оскільки $T_0(X) = T_0 = const$, то інтеграли у правій частині /14/ можна обчислити. Автори провели такі обчислення при $k = 1, 2, \ldots, 10$. Наведемо перші з отриманих виразів

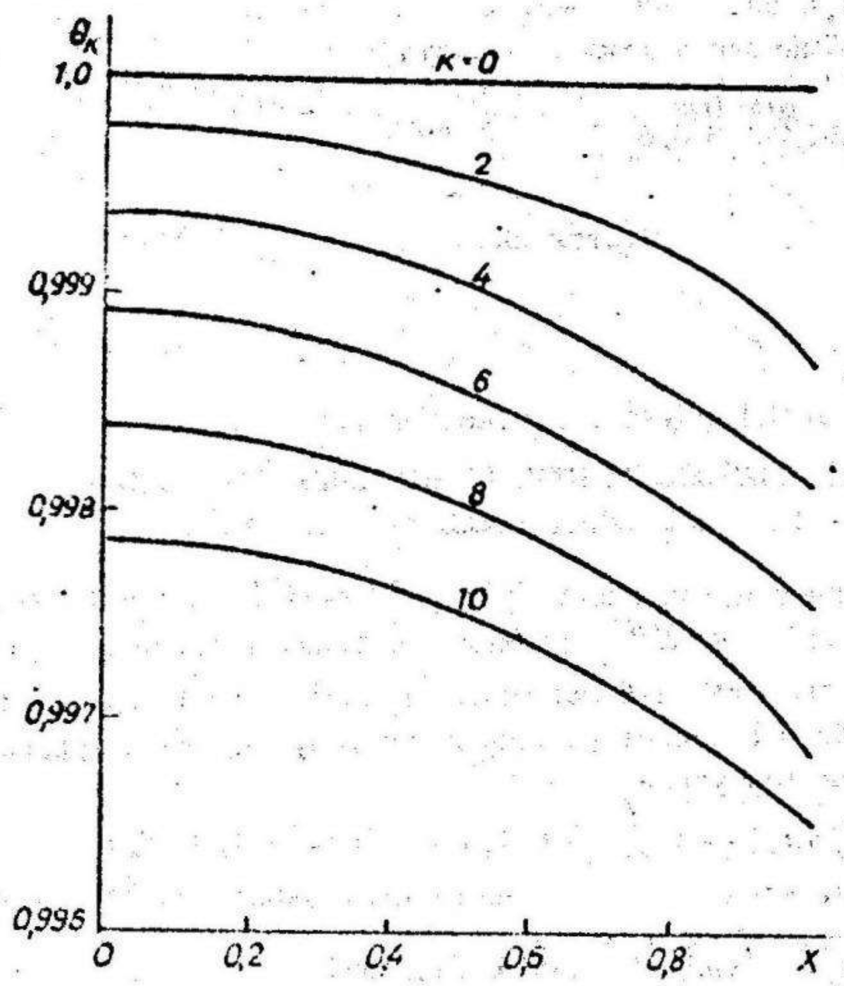
$$T_1(X) = T_0 + (A_1 - T_0)\, ch\frac{X}{\sqrt{h}} ,$$

$$T_2(X) = T_0 + (A_2 - T_0)\, ch\frac{X}{\sqrt{h}} - \frac{1}{2}(A_1 - T_0)\frac{X}{\sqrt{h}}\, sh\frac{X}{\sqrt{h}} ,$$

$$T_3(X) = T_0 + (A_3 - T_0)\, ch\frac{X}{\sqrt{h}} - \Big(\frac{1}{2}(A_2 - T_0) - \qquad /15/$$

$$- \frac{1}{8}(A_1 - T_0)\Big)\frac{X}{\sqrt{h}}\, sh\frac{X}{\sqrt{h}} + \frac{1}{8}(A_1 - T_0)\Big(\frac{X}{\sqrt{h}}\Big)^2 ch\frac{X}{\sqrt{h}} ,$$

. . . .



Доведено існування розв"язку задачі /4/-/6/ методом Роте [2]. Користуючись принципом максимуму статті [2] і повторюючи міркування [1, с. 493], можна довести, що

$$|T(X,FO_\kappa)-T_\kappa(X)|\leq FO^*\varepsilon ,$$

де ε не залежить від κ і прямує до нуля разом з h.

При $\nu=1$, $t_0=2000\,^\circ C$, $Bi=1$, $T_c=20^\circ C$, $FO^*=1$, $h=0{,}1$ проведене числове дослідження наближеного значення безрозмірної температури $\theta_\kappa(X)=T_\kappa^{\frac{1}{\nu}}(X)/t_0$ методом Роте. Результати обчислень представлені у вигляді графіків на рисунку. Функції $T_\kappa(X)$ обчислювалися за формулами /14/ і за явними формулами /15/. Результати обчислень практично збіглися. При збільшенні кроку за часом з 0,1 до 0,2 наближені значення безрозмірної температури $\theta_\kappa(X)$ збіглися в ті ж моменти часу незалежно від того, отримані вони з кроком h = 0,1 чи з кроком h = 0,2 /відносне відхилення результатів не перевищує 0,5 %/.

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М., 1981. Т.4. Ч.2. 2. Чжоу Юй-Линь. Краевые задачи для нелинейных параболических уравнений // Матем. сб. 1959. 47 /89/. № 4. С.431-484. 3. Rothe E. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben // Math. Ann. Bd.102. S.650 - 670.

Стаття надійшла до редколегії 19.04.90

УДК 530.145

В.С.Барбуляк, Ю.Г.Кондратьєв

ЗАДАННЯ ГІБСІВСЬКИХ СТАНІВ КВАНТОВИХ ГРАТКОВИХ СИСТЕМ У ТЕРМІНАХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Розглянемо цілочислову гратку $\mathbb{Z}^d=\{\kappa=(\kappa^{(1)},\dots,\kappa^{(d)}),\kappa^{(i)}\in\mathbb{Z},i=1,\dots,d\}$. З кожним вузлом $\kappa\in\mathbb{Z}^d$ зв"яжемо частинку з одним внутрішнім ступенем вільності. Цій частинці відповідає простір станів $\mathcal{H}_\kappa=L_2(\mathbb{R}^1,dx_\kappa)$ і канонічні оператори імпульсу та координати, що визначаються формулами

$$(p_\kappa f)(x_\kappa)=-i\frac{d}{dx_\kappa}f(x_\kappa),\ (q_\kappa f)(x_\kappa)=x_\kappa f(x_\kappa),$$

самоспряжені в $\mathcal{H}_\kappa$. Скінченній підмножині $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ відповідає