б/ на $(\Omega_\beta, \mathfrak{G})$

$$d\nu(\omega(\cdot)) = \frac{1}{Z} e^{-E(\omega(\cdot))} d\nu_0(\omega(\cdot)), \qquad /8/$$

де Z_Λ, Z – нормуючі множники. Зображення /8/ носить формальний характер. Існування міри /8/ [1] еквівалентне існуванню гіббсівського стану системи, що відповідає гамільтоніану

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k\in Z^d} p_k^2 + E(\omega(\cdot)) + \sum_{k\in Z^d} V(q_k). \qquad /9/$$

Доведення збіжності мір виду /7/ до міри виду /8/ при термодинамічному граничному переході $\Lambda \to Z^d$ – досить складне завдання. Воно здійснюється з використанням різноманітних технічних прийомів, вибір яких залежить від конкретного класу розглядуваних моделей.

1. Глоба С.А., Кондратьев Ю.Г. Построение гиббсовских состояний квантовых решеточных систем // Применение методов функционального анализа в задачах математической физики. К., 1987. С.4-16. 2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1978. Т.2.

Стаття надійшла до редколегії 04.06.90

УДК 530.145

В.С.Барбуляк, Ю.Г.Кондратьев

КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ ГІББСІВСЬКИХ СТАНІВ КВАНТОВИХ ГРАТКОВИХ СИСТЕМ

У праці [1] побудовано ймовірнісні міри

$$d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot)) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-E_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot))} d\nu_{0,\Lambda}(\omega(\cdot)) \qquad /1/$$

на вимірному просторі $(\Omega_\beta(\Lambda), \mathfrak{G}(\Lambda))$ при фіксованій граничній умові $\bar{\omega} \in \Omega_\beta$ та

$$d\nu(\omega(\cdot)) = \frac{1}{Z} e^{-E(\omega(\cdot))} d\nu_0(\omega(\cdot)) \qquad /2/$$

на вимірному просторі $(\Omega_\beta, \mathfrak{G})$. Існування міри /2/ еквівалентне існуванню гібсівського стану системи, що відповідає гамільтоніану

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} p_k^2 + E(\omega(\cdot)) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} V(q_k). \qquad /3/$$

Наступна теорема, що узагальнює на квантовий випадок відому в класичному випадку теорему Добрушина [2], є критерієм існування гібсівських станів у нескінченному об"ємі.

Теорема. Нехай для гамільтоніана /3/ знайдуться:

а/ компактна функція h ;

б/ числа c_{jl}, $j,l\in\mathbb{Z}^d$ і стала $c, 0<c<1$, для яких

$$\forall j \sum_l |c_{jl}| \le c;$$

в/ число $K>0$

такі, що

$\forall \Lambda, \Lambda\subset\mathbb{Z}^d, |\Lambda|<\infty$ і граничної умови $\bar\omega\in\Omega_\beta$, для якої

$$\max_{j\in\Lambda}\sum_{l\in\Lambda^c}|c_{jl}|h(\bar\omega_l)<\infty,$$

міра $d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar\omega_{\Lambda^c}(\cdot))$ існує і

$$\int h(\omega_j)\,d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar\omega_{\Lambda^c}(\cdot)) \le K + \sum_{l\ne j} c_{jl}h(\omega_l). \qquad /4/$$

Тоді сім"я мір $\{\nu_\Lambda(\omega_\Lambda|\bar\omega_{\Lambda^c}), \Lambda\subset\mathbb{Z}^d, |\Lambda|<\infty\}$ слабко компактна.

Нехай, крім того, $\forall j\in\mathbb{Z}^d$ $\forall a$ – неперервної обмеженої функції на $\mathcal{G}$ [1] знайдуться:

а/ послідовність множин $M_n\subset\mathbb{Z}^d, |M_n|<\infty, \bigcup_n M_n=\mathbb{Z}^d\setminus\{j\}$;

б/ числа $d_{jl}^{(n)}\ge 0$, $j\ne l$, для яких

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} d_{jl}^{(n)} \le D^{(n)}, \quad D^{(n)}\to 0 \quad \text{при } n\to\infty;$$

в/ послідовність неперервних обмежених функцій $f_n(\omega_{M_n})$

такі, що для будь-якої граничної умови $\bar\omega\in\Omega_\beta$, для якої

$$\sum_{l\ne j}|c_{jl}|h(\bar\omega_l)<\infty,$$

справедлива оцінка

$$\left|\int a(\omega_j)\,d\nu_j(\omega_j(\cdot)|\bar\omega_{\mathbb{Z}^d\setminus\{j\}}(\cdot)) - f_n(\omega_{M_n})\right| \le D^{(n)} + \sum_{l\ne j} d_{jl}^{(n)} h(\omega_l). \qquad /5/$$

Тоді існує хоча б одна міра $d\bar{\nu}(\omega(\cdot))$, яка відповідає гамільтоніану /3/ в тому розумінні, що її умовні розподіли задаються /1/.

Доведення. Фіксуємо зростаючу послідовність множин $\Lambda_n, \Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda_n| < \infty$ і граничних умов $\bar{\omega}_{\Lambda_n^c}$ таких, що $\forall l \in \Lambda_n^c\, h(\bar{\omega}_l) \le A$ для деякої сталої A. Послідовність ймовірнісних мір ν_n на Ω_β побудуємо наступним чином:

$\nu_n(\bar{\omega}_{\Lambda_n^c}) = 1,\ d\nu_n = d\nu_{\Lambda_n}(\omega(\cdot) \mid \bar{\omega}_{\Lambda_n^c}(\cdot))$ [див.: I, вираз /7/].

Лема 1. $\forall j$

$$\sup_n \int h(\omega_j)\, d\nu_n \le \frac{K+cA}{1-c} \equiv K_0 .$$

Доведення. Оскільки $\forall n\ \Omega_\beta(\Lambda_n)$ – сепарабельний метричний простір, то міра ν_n є щільною, тобто $\forall \varepsilon\, \exists K_\varepsilon^n \subset \Omega_\beta(\Lambda_n)\, \nu_n(K_\varepsilon^n) \ge 1-\varepsilon$. Тоді

$$\int h(\omega_j)\, d\nu_n = \int_{K_\varepsilon^n} h(\omega_j)\, d\nu_n + \int_{\Omega_\beta(\Lambda_n)\setminus K_\varepsilon^n} h(\omega_j)\, d\nu_n .$$

Із абсолютної неперервності інтеграла випливає, що $\forall \eta\, \exists K_\varepsilon^n$

$$\int_{\Omega_\beta(\Lambda_n)\setminus K_\varepsilon^n} h(\omega_j)\, d\nu_n < \eta .$$

З теореми Лузіна випливає існування неперервної функції $h^c(\omega_j)$ на $K_\varepsilon^n(j) = K_\varepsilon^n \big|_{\Omega_\beta(\{j\})}$ такої, що міра множини $\{\omega_j \mid h(\omega_j) \ne h^c(\omega_j)\}$ є меншою від довільного додатного числа. На $K_\varepsilon^n(j)$ функція $h^c(\omega_j)$ досягає своєї верхньої межі, тому $\forall \varepsilon\, \forall n$

$$\int_{K_\varepsilon^n} h(\bar{\omega}_j)\, d\nu_n$$

скінченний. Зафіксуємо числа ε і n. Тоді

$$\max_{j \in \Lambda_n} \int h(\omega_j)\, d\nu_n = A_\varepsilon^n < \infty .$$

Вибравши j, при якому досягається максимум, прийнявши в /4/ $\Lambda = \{j\}$ і проінтегрувавши це співвідношення за мірою ν_n, отримаємо

$$A_\varepsilon^n \le K + A_\varepsilon^n c + cA .$$

Отже,

$$\sup_n \sup_\varepsilon A_\varepsilon^n \le \frac{K+cA}{1-c},$$

звідки і випливає твердження леми.

З леми 1 і співвідношення /6/ праці [1] випливає, що ν_n – слабко компактна послідовність. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що до деякої граничної міри $\bar{\nu}$ збігається сама послідовність ν_n.

Лема 2. Нехай f – невід"ємна, півнеперервна знизу функція на метричному просторі X і послідовність ймовірнісних мір μ_n на X слабко збігається до деякої міри μ. Крім того, $\forall n$

$$\int f d\mu_n \leq C.$$

Тоді

$$\varliminf_{n\to\infty} \int f d\mu_n \geq \int f d\mu .$$

Доведення. Для довільної міри χ, такої, що

$$\int f d\chi \leq C,$$

справедлива оцінка

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{i-1}{K}+l\right)\chi\left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{K}+l< f(x) \leq \frac{i}{K}+l\right\} \leq \int f d\chi \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{i}{K}+l\right)\chi\left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{K}+l< f(x) \leq \frac{i}{K}+l\right\}, \; x\in X.$$

Позначимо $G_i^l = \left\{x \mid f(x) > \frac{i}{K}+l\right\}$. Тоді, зробивши очевидні перетворення і скориставшись скінченністю інтеграла функції f за мірою χ, отримаємо, що

$$\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\chi(G_i^l) \leq \int f d\chi \leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\chi(G_i^l).$$

Виписавши ланцюжок нерівностей

$$\varliminf_{n\to\infty}\int f d\mu_n \geq \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\mu_n(G_i^l) \geq \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\varliminf_{n\to\infty}\mu_n(G_i^l) \geq$$

$$\geq \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K}\mu(G_i^l) \geq -\frac{1}{K} + \int f d\mu$$

і перейшовши до границі при $K\to\infty$, отримаємо твердження леми.

З лем 1 і 2 випливає, що

$$\int h(\omega_j)\, d\bar{\nu} \leq K_0 .$$

Граничний розподіл $\bar{\nu}$ відповідає гамільтоніану /3/, якщо для довільних вимірних $a(\omega_K), b(\omega_\Lambda)$

$$\int a(\omega_K) b(\omega_\Lambda)\, d\bar{\nu} = \int b(\omega_\Lambda)\, d\bar{\nu} \int a(\omega_K)\, d\nu_\Lambda(\omega_K(\cdot) \mid \bar{\omega}_{Z^d \setminus \{K\}}(\cdot)). \qquad /6/$$

Оскільки міра однозначно відновлюється при заданні її значень на неперервних обмежених функціях, то /6/ досить довести для $a(\omega_\kappa)$, $b(\omega_\Lambda)$, неперервних і обмежених.

Для досить великих n, таких, що $\Lambda \subset \Lambda_n$, справедлива рівність

$$\int a(\omega_\kappa) b(\omega_\Lambda) d\nu_n = \int b(\omega_\Lambda) d\nu_n \int a(\omega_\kappa) d\nu_\kappa(\omega_\kappa(\cdot) | (\bar{\omega}_{\Lambda_n \setminus \{\kappa\}} \cup \bar{\omega}_{\Lambda_n^c})(\cdot)). \quad /7/$$

За означенням слабкої збіжності ліва частина /7/ при $n \to \infty$ прямує до лівої частини /6/. З /5/ випливають оцінки зверху і знизу для внутрішнього інтеграла у правій частині /7/. Підставивши ці оцінки в /7/ і використавши лему 1, отримаємо /6/. Теорема доведена.

1. Барбуляк В.С., Кондратьєв Ю.Г. Задання гібсівських станів квантових граткових систем в термінах функціональних інтегралів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 36. 2. Добрушин Р.Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений // Теория вероятностей и ее применения. 1970. Т.15. Вып. 3. С.469-497.

Стаття надійшла до редколегії 04.06.90

УДК 539.3

Р.Д.Кульчицький-Жигайло

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

У реальних матеріалах, як правило, існують напруження і деформації ще до моменту прикладання до них зовнішніх зусиль, внаслідок чого дослідженню напружено-деформованого стану тіл з початковими напруженнями приділяється багато уваги [1, 2]. В публікації [1] дана постановка задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями у випадку пружних потенціалів довільної форми. У нашій статті на основі алгоритму, запропонованому в [1], отримані лінеаризовані співвідношення термопружності для тіл з початковими напруженнями.