Оскільки міра однозначно відновлюється при заданні її значень на неперервних обмежених функціях, то /6/ досить довести для $a(\omega_\kappa)$, $b(\omega_\Lambda)$, неперервних і обмежених.

Для досить великих n, таких, що $\Lambda \subset \Lambda_n$, справедлива рівність

$$\int a(\omega_\kappa) b(\omega_\Lambda) d\nu_n = \int b(\omega_\Lambda) d\nu_n \int a(\omega_\kappa) d\nu_\kappa(\omega_\kappa(\cdot) | (\bar{\omega}_{\Lambda_n \setminus \{\kappa\}} \cup \bar{\omega}_{\Lambda_n^c})(\cdot)). \quad /7/$$

За означенням слабкої збіжності ліва частина /7/ при $n \to \infty$ прямує до лівої частини /6/. З /5/ випливають оцінки зверху і знизу для внутрішнього інтеграла у правій частині /7/. Підставивши ці оцінки в /7/ і використавши лему 1, отримаємо /6/. Теорема доведена.

1. Барбуляк В.С., Кондратьєв Ю.Г. Задання гібсівських станів квантових граткових систем в термінах функціональних інтегралів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 36. 2. Добрушин Р.Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений // Теория вероятностей и ее применения. 1970. Т.15. Вып. 3. С.469-497.

Стаття надійшла до редколегії 04.06.90

УДК 539.3

Р.Д.Кульчицький-Жигайло

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

У реальних матеріалах, як правило, існують напруження і деформації ще до моменту прикладання до них зовнішніх зусиль, внаслідок чого дослідженню напружено-деформованого стану тіл з початковими напруженнями приділяється багато уваги [1, 2]. В публікації [1] дана постановка задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями у випадку пружних потенціалів довільної форми. У нашій статті на основі алгоритму, запропонованому в [1], отримані лінеаризовані співвідношення термопружності для тіл з початковими напруженнями.

1. Рух тіла розглядаємо відносно декартової системи координат $\xi_1 \xi_2 \xi_3$. Закон руху задаємо співвідношеннями

$$X_i = X_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1,2,3. \qquad /1.1/$$

Тут $\xi_i \ (i = 1,2,3)$ – лагранжеві координати; $X_i \ (i = 1,2,3)$ – ейлерові координати точок тіла. Якщо $\vec{u}$ – вектор пружного переміщення з компонентами $u_k \ (k = 1,2,3)$, то закон руху можна записати як

$$X_k = \xi_k + u_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t). \qquad /1.2/$$

Основні співвідношення нелінійної термопружності для даного тіла мають вигляд [3, 5]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k); \qquad /1.3/$$

$$\rho \dot{v}_i = \partial_{x_k} \sigma_{ik}; \qquad /1.4/$$

$$\rho c_F \dot{T} = T \partial_T \sigma_{ik} \partial_{x_k} v_i - \partial_{x_k} q_k; \qquad /1.5/$$

$$\sigma_{ik} = \rho \partial_{\varepsilon_{ik}} F^* |_T, \ \eta = -\partial_T F^* |_{\varepsilon_{ij}}, \ \rho = \rho_0 \det \| \partial_j X_i \|. \qquad /1.6/$$

У співвідношеннях /1.3/–/1.6/ введені такі позначення: $F^* = U - T\eta$ – густина вільної енергії, віднесена до одиниці маси; U – густина внутрішньої енергії; η – густина ентропії; T – температура; $c_F = T \partial_T \eta$ – теплоємність при постійній деформації; ρ, ρ_0 – густина матеріалу в актуальному і початковому станах; ε_{ij} – компоненти тензора деформації Гріна $\hat{\varepsilon}$; σ_{ij} – компоненти тензора напружень Коші; $\vec{q}$ – вектор теплового потоку; $\vec{v}$ – вектор швидкості матеріальної частинки, $\partial_j = \partial_{\xi_j}$.

Будемо припускати, що для вектора теплового потоку справедливий закон теплопровідності Фур'є

$$q_i = \varkappa_i(\hat{\varepsilon}) \partial_{x_i} T, \qquad /1.7/$$

де $\varkappa_i$ – коефіцієнти теплопровідності. Надалі розглядатимемо тільки такі процеси, які повільно змінюються в часі, а тому похідними по часу і компонентами вектора швидкості в подальших викладках будемо нехтувати.

Відзначимо, що у співвідношеннях /1.4/-/1.7/ диференціювання ведеться за ейлеровими змінними X_k, які, згідно з /1.2/, залежні від невідомих компонент вектора пружного переміщення. Для уникнення труднощів, зумовлених диференціюванням за залежними параметрами, зручно перейти у даних рівняннях від змінних X_k до змінних ξ_l, які є незмінними в процесі руху. Після обчислень, використовуючи [1, 4], прийдемо до співвідношень

$$\partial_j \pi_{ij} = 0; \qquad /1.8/$$

$$\pi_{ij} = S_{kj}(\delta_{ik} + \partial_k u_i), \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_{\varepsilon_{ij}} + \partial_{\varepsilon_{ji}})F; \qquad /1.9/$$

$$g^{ik}\{\varkappa_i(\hat{\varepsilon})[\partial^2_{ik}T - \Gamma^j_{ik}\partial_j T] + \partial_{\varepsilon_{ml}}\varkappa_k(\hat{\varepsilon})\,\partial_i \varepsilon_{ml}\,\partial_k T\} = 0. \qquad /1.10/$$

У /1.8/-/1.10/ $F = \rho_0 F^*$ – густина вільної енергії, віднесена до одиниці об"єму в недеформованому стані; π_{ij} – компоненти тензора напружень Піола-Кірхгофа; S_{ij} – компоненти тензора узагальнених напружень [1]; g^{ik}, Γ^j_{ik} – відповідно контраваріантні компоненти метричного тензора і символи Крістофеля другого роду для актуальної [5] лагранжевої системи координат.

2. Будемо розглядати три стани тіла: природний стан, в якому напруження і деформації дорівнюють нулеві, початковий, який характеризується наявністю в тілі напружень і деформацій, і збурений стан. Величини, які описують збурений стан тіла, подамо у вигляді

$$f_i' = f_i^0 + f_i. \qquad /2.1/$$

У /2.1/ f_i' – характеристики збуреного стану тіла; f_i^0 – характеристики початкового стану; f_i – збурення. Припускаємо, що збурення набагато менше від відповідних величин початкового напружено-деформованого стану, тобто приймаємо $|f_i| \ll |f_i^0|$. Дане припущення дає змогу лінеаризувати рівняння термопружності /1.3/, /1.8/-/1.10/ і стосовно збурень отримати лінійні рівняння. Використовуючи алгоритм лінеаризації, запропонований О.М.Гузем, прийдемо до співвідношень

$$2\varepsilon_{ij} = [(\delta_{kj} + \partial_j u_k^0)\partial_i + (\delta_{ki} + \partial_i u_k^0)\partial_j]\,u_k; \qquad /2.2/$$

$$\partial_j \pi_{ij} = 0; \qquad /2.3/$$

$$\mathcal{T}_{ij} = \omega_{ijkl}\,\partial_l u_k + \gamma_{ij}\,\alpha T; \qquad /2.4/$$

$$g_0^{ik}\left\{\varkappa_i(\hat{\varepsilon}^0)\left[\partial^2_{ik}T - \partial_j T\,\Gamma^{j,0}_{ik}\right] + \partial_{\varepsilon^0_{ml}}\varkappa_k(\hat{\varepsilon}^0)\,\partial_i\varepsilon^0_{ml}\,\partial_k T\right\} = 0, \qquad /2.5/$$

де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення

$$\omega_{ijkl} = \frac{1}{4}(\delta_{nj} + \partial_n u^0_j)(\delta_{mk} + \partial_m u^0_k)(\partial_{\varepsilon^0_{ml}} + \partial_{\varepsilon^0_{lm}})(\partial_{\varepsilon^0_{in}} + \partial_{\varepsilon^0_{ni}})F + \delta_{jk}\,S^0_{il}; \qquad /2.6/$$

$$S^0_{il} = \frac{1}{2}(\partial_{\varepsilon^0_{il}} + \partial_{\varepsilon^0_{li}})F^0; \qquad /2.7/$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{nj} + \partial_n u^0_j)(\partial_{\varepsilon^0_{in}} + \partial_{\varepsilon^0_{ni}})F^0_1, \quad F^0_1 = \partial_{(\alpha T)}F\Big|_{\substack{\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^0 \\ \alpha T = 0}} . \qquad /2.8/$$

Зауважимо, що у випадку ізотермічного процесу $(T = const)$ співвідношення /2.2/–/2.4/, /2.6/, /2.7/ перейдуть у відповідні співвідношення, отримані у працях О.М.Гузя.

3. Розглянемо ізотропні тіла. Функцію вільної енергії $F(\hat{\varepsilon}, \alpha T)$ у цьому випадку можна розглядати як функцію трьох довільних незалежних інваріантів тензора деформації Гріна і температури. Надалі будемо розглядати такі дві системи інваріантів:

алгебраїчні інваріанти

$$A_1 = \varepsilon_{ii}\ , \quad A_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}\ , \quad A_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki} \qquad /3.1/$$

та інваріанти

$$S_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3\ ; \quad S_2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2\ ; \quad S_3 = \delta_1^3 + \delta_2^3 + \delta_3^3\ , \qquad /3.2/$$

де $\delta_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i} - 1$; ε_i – головні значення тензора деформації Гріна.

Допустимо, що початковий напружено-деформований стан у тілі є однорідним і визначається співвідношеннями

$$u_m = \delta_{mi}(\lambda_i - 1)\varepsilon_i\ ; \quad 2\varepsilon^0_{ij} = \delta_{ij}(\lambda_j^2 - 1) = 2\delta_{ij}\,\varepsilon^0_i\ . \qquad /3.3/$$

Враховуючи /3.3/, співвідношення /2.2/, /2.5/–/2.8/ після обчислень зводимо до вигляду

$$2\varepsilon_{ij} = \lambda_i\partial_j u_i + \lambda_j\partial_i u_j\ ; \qquad /3.4/$$

$$\omega_{ijkl} = \lambda_j\lambda_k\left[\delta_{ij}\delta_{kl}A_{il} + (\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{li}\delta_{jk})(1 - \delta_{ij})\mu_{ij}\right] + \delta_{jk}\delta_{il}S^0_{ii}\ ; \qquad /3.5/$$

$$\gamma_{ij} = \lambda_j \delta_{ij} \Sigma_{ii} F_1^0 = \gamma_i \delta_{ij} \; ; \qquad /3.6/$$

$$A_{il} = [\Sigma_{ii} \Sigma_{ll} + 2\delta_{il} B_{ii}] F^0 ; \; \mu_{ij} = B_{ij} F ; \; S_{ii}^0 = \Sigma_{ii} F^0 ; \qquad /3.7/$$

$$\Sigma_{ii} = \partial_{A_1^0} + 2\varepsilon_{ii}^0 \partial_{A_2^0} + 3\varepsilon_{ii}^{0\,2} \partial_{A_3^0} ; \; B_{ij} = \partial_{A_2^0} + \frac{3}{2}(\varepsilon_{ii}^0 + \varepsilon_{jj}^0) \partial_{A_3^0} \; ; \qquad /3.8/$$

$$\mathcal{H}_1(\hat{\mathcal{E}}^0) \lambda_1^{-2} \partial_1^2 \Gamma_1 + \mathcal{H}_2(\hat{\mathcal{E}}^0) \lambda_2^{-2} \partial_2^2 T + \mathcal{H}_3(\hat{\mathcal{E}}^0) \lambda_3^{-2} \partial_3^2 \Gamma = 0. \qquad /3.9/$$

Співвідношення /2.3/, /2.4/ залишаються без змін.

Зауважимо, що /3.7/, /3.8/ зручно користуватись у випадку, коли функція вільної енергії задана як функція алгебраїчних інваріантів тензора деформації Гріна. Якщо функція вільної енергії є функцією інваріантів /3.2/, то від співвідношень /3.7/, /3.8/ можна перейти [1] до виразів

$$A_{il} = \partial^2_{\varepsilon_i^0 \varepsilon_l^0} F , \; \mu_{ij} = \frac{(\partial_{\varepsilon_i^0} - \partial_{\varepsilon_j^0}) F^0}{2(\varepsilon_i^0 - \varepsilon_j^0)} , \; \Sigma_{ii} = \partial_{\varepsilon_i^0} \; . \qquad /3.10/$$

4. Поряд з лагранжевими координатами ξ_j введемо декартові координати y_j початкового стану. Зв"язок між координатами ξ_j і y_j подамо у вигляді

$$y_j = \lambda_j \xi_j \; . \qquad /4.1/$$

Запишемо всі співвідношення лінеаризованої термопружності для тіл з початковими напруженнями в координатах y_j, причому всі величини віднесемо до розмірів площадок у початковому стані. Для цього позначимо через Q_{ij} складові вздовж осі Oy_j вектора напружень на площадці $y_i = const$, які вимірюються на одиницю площі в початковому стані. Між величинами Q_{ij} і компонентами тензора напружень Піола-Кірхгофа існує зв"язок [1]

$$Q_{ij} = \lambda_i (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \pi_{ij} \; . \qquad /4.2/$$

Якщо тепер подати

$$Q_{ij} = \tilde{\omega}_{ijkl} u_{k,l} + \tilde{\gamma}_i \delta_{ij} \alpha T , \qquad /4.3/$$

то отримаємо

$$\tilde{\omega}_{ijkl} = \lambda_l \lambda_l (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \omega_{ijkl} \; , \; \tilde{\gamma}_i = \lambda_i (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \gamma_i \; .$$

У співвідношенні /4.3/ введено позначення $\partial_{y_l} f = f_{,l}$.

Рівняння рівноваги /2.3/ і рівняння теплопровідності при переході до координат y_i набудуть вигляду

$$Q_{ij,i} = 0; \qquad /4.4/$$

$$\varkappa_1(\hat{\varepsilon}^0)T_{,11} + \varkappa_2(\hat{\varepsilon}^0)T_{,22} + \varkappa_3(\hat{\varepsilon}^0)T_{,33} = 0. \qquad /4.5/$$

Підставивши /4.3/ у /4.4/, отримаємо рівняння рівноваги пружного середовища в переміщеннях

$$\tilde{\omega}_{ijkl}\, u_{k,li} + \tilde{\gamma}_i \delta_{ij} \alpha T_{,i} = 0. \qquad /4.6/$$

Поряд з вихідною системою диференціальних рівнянь термопружності для тіл з початковими напруженнями сформулюємо також крайові умови. Якщо на деякій частині поверхні S_1 задані зусилля і потік тепла, а на іншій S_2 — переміщення і температура, то відповідні вирази матимуть вигляд

$$N_i^0 Q_{ij}\big|_{S_1} = P_j, \quad N_i^0 \varkappa_i(\hat{\varepsilon}^0) T_{,i}\big|_{S_1} = G; \qquad /4.7/$$

$$u_j\big|_{S_2} = f_j, \qquad T\big|_{S_2} = T_0. \qquad /4.8/$$

У /4.7/ величини P_j і G віднесені до одиниці поверхні тіла в початковому стані.

Співвідношення /4.5/-/4.8/ служать теоретичною основою для постановки відомих задач термопружності для тіл з початковими напруженнями.

1. Бабич С.Ю., Гузь А.Н., Рудницкий В.В. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями /жесткие штампы/ // Прикл. механика. 1989. 25б. № 8. С.3-18. 2. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. К., 1983. 3. Кондауров В.И. О законах сохранения и симметризации уравнений нелинейной теории термоупругости // Докл. АН СССР. 1982. 256. № 4. С.819-823. 4. Новожилов В.В. Основы нелинейной упругости. М., 1948. 5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М., 1976. Т.2.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90