УДК 539.3

Л.О.Тисовський

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ І ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ПЛОСКІЙ ДЕФОРМАЦІЇ БАГАТОШАРОВОГО СУЦІЛЬНОГО ЦИЛІНДРА

Розглядається суцільний пружний багатошаровий необмежений циліндр. Матеріал кожного шару вважається однорідним, ізотропним і характеризується своїми пружними сталими λ_i, μ_i і коефіцієнтом лінійного розширення α_i $(i = 1, \ldots, N)$.

Вважаємо, що поверхневі та об"ємні сили на циліндр не діють, а на лініях розділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного і теплового контакту. Напружено-деформований стан у композиті виникає в результаті його стаціонарного нагріву з нульової початкової до деякої температури T. Припустимо поки що, що температура у довільній точці циліндра – відома функція радіальної координати.

При зроблених припущеннях потрібно визначити поле температурних переміщень і напружень у тілі.

Введемо в розгляд циліндричну систему координат r, θ, z. Оскільки температура залежить лише від радіальної координати, то віддалені від торців циліндра перерізи, ортогональні осі залишаються плоскими, тобто має місце плоский деформований стан.

Запишемо повну систему рівнянь термопружності для осесиметричної плоскої деформації. У цьому випадку відмінні від нуля переміщення u, деформації $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ напруження $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ пов"язані між собою системою диференціальних залежностей*

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d(ru)}{dr}\right] = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\,\alpha\,\frac{dT}{dr}, \qquad /1/$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r};$$

$$\sigma_r = 2\mu\varepsilon_r + \lambda e - \gamma T;$$

$$\sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda e - \gamma T;$$

$$\sigma_z = \lambda e - \gamma T. \qquad /2/$$

* М е л а н Э., П а р к у с Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М., 1958.

Тут $e = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r}$ – об"ємне розширення, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$. Відзначимо, що отриманий розв"язок повинен задовольняти крайові умови

$$\sigma_r^i\Big|_{r=R_i} = \sigma_r^{i+1}\Big|_{r=R_i} \equiv p_i\,, \quad i=1,\dots,N-1;\ \sigma_r^N\Big|_{r=R_N} = 0\,,$$

$$u^i\Big|_{r=R_i} = u^{i+1}\Big|_{r=R_i}\,, \quad i=1,\dots,N-1\,, \qquad /3/$$

які являють собою умови ідеального механічного контакту на лінії розділу матеріалів і умову незавантаженості бічної поверхні циліндра. Тут і надалі індексом "i" позначено номер шару, $p_i\ (i=1,\dots,N-1)$ – невідомі величини, які вводимо для зручності.

Дотримуючись відомого підходу, розв"язок задачі для багатошарового циліндра представимо у вигляді пакета розв"язків для кожного шару, спряжених між собою крайовими умовами /3/.

Перейшовши від пружних постійних Ляме λ, μ до модуля Юнга E і коефіцієнта Пуассона ν, пов"язаних між собою співвідношеннями

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\,,$$

а також використавши співвідношення /1/, /2/, можемо знайти вирази для компонент поля переміщень і напружень всередині i -го шару $(i=1,\dots,N)$

$$u^i(r) = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\,\frac{\alpha_i}{r}\int_{R_{i-1}}^{r} T_i(r)\,r\,dr + A_i r + \frac{B_i}{r}\,;$$

$$\sigma_r^i(r) = -\frac{1}{1-\nu_i}\,\frac{\alpha_i E_i}{r^2}\int_{R_{i-1}}^{r} T_i(r)\,r\,dr + \frac{E_i A_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} - \frac{E_i}{1+\nu_i}\,\frac{B}{r^2}\,;$$

$$\sigma_\theta^i(r) = \frac{1}{1-\nu_i}\,\frac{\alpha_i E_i}{r^2}\int_{R_{i-1}}^{r} T_i(r)\,r\,dr - \frac{\alpha_i E_i T_i(r)}{1-\nu_i} + \frac{E_i A_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} + \frac{E_i}{1+\nu_i}\,\frac{B_i}{r^2}\,;$$

$$\sigma_z^i(r) = -\frac{\alpha_i E_i T_i(r)}{1-\nu_i} + \frac{2\nu_i E_i A_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}\,; \quad R_0 = 0\,.$$

/4/

Постійні інтегрування A_i, B_i знайдемо з крайових умов

$$\sigma_r^i\Big|_{r=R_{i-1}}=p_{i-1}; \quad \sigma_r^i\Big|_{r=R_i}=p_i; \quad i=1,\dots,N. \qquad /5/$$

В результаті отримаємо

$$A_1=\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\,\frac{1-2\nu_1}{R_1^2}\,\alpha_1\int_0^{R_1}T_1(r)r\,dr+\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{E_1}p_1;\ B_1=0;$$

$$A_i=\alpha_i\frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{1-\nu_i}\,\frac{1}{R_i^2-R_{i-1}^2}\int_{R_{i-1}}^{R_i}T_i(r)r\,dr+\frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{E_i}\,\frac{p_iR_i^2-p_{i-1}R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2};$$

$$B_i=\alpha_i\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\,\frac{R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}\int_{R_{i-1}}^{R_i}T_i(r)r\,dr+\frac{1+\nu_i}{E_i}\,\frac{R_i^2R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}(p_i-p_{i-1}). \qquad /6/$$

$$(i=2,\dots,N)$$

Невідомі контактні зусилля на лініях розділу матеріалів $p_0=p_N=0$, $p_i\ (i=1,\dots,N-1)$ визначаються з умов неперервності переміщень, які на лінії розділу матеріалів i та $i+1$ шару можна представити у вигляді

$$a_ip_{i-1}+b_ip_i+c_i=d_i \quad (i=1,\dots,N-1), \qquad /7/$$

де

$$a_i=-\frac{1+\nu_i}{E_i}\,\frac{2(1-\nu_i)R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2};\quad c_i=-\frac{1+\nu_{i+1}}{E_{i+1}}\,\frac{2(1-\nu_{i+1})R_{i+1}^2}{R_{i+1}^2-R_i^2};$$

$$b_i=\frac{1+\nu_i}{E_i}\,\frac{(1-2\nu_i)R_i^2+R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}+\frac{1+\nu_{i+1}}{E_{i+1}}\,\frac{(1-2\nu_{i+1})R_i^2+R_{i+1}^2}{R_{i+1}^2-R_i^2};$$

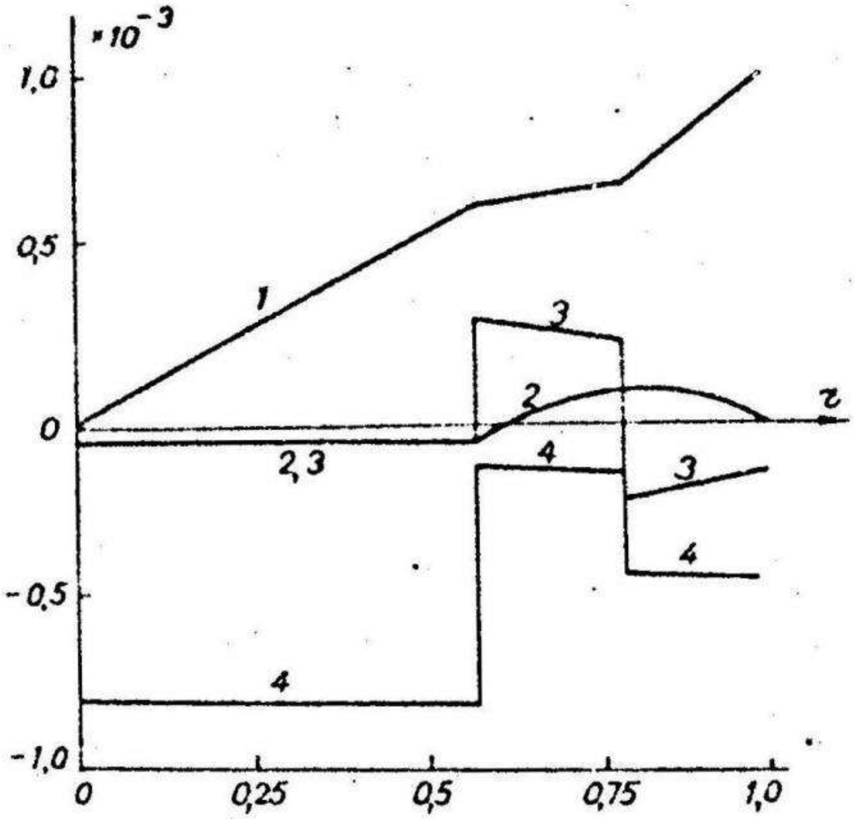
$$d_i=\frac{2\alpha_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{R_{i+1}^2-R_i^2}\int_{R_i}^{R_{i+1}}T_{i+1}(r)r\,dr-\frac{2\alpha_i(1+\nu_i)}{R_i^2-R_{i-1}^2}\int_{R_{i-1}}^{R_i}T_i(r)r\,dr. \qquad /8/$$

При зміні i від 1 до $N-1$ з /7/ отримуємо тридіагональну систему $N-1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з такою ж кількістю невідомих. Визначивши з неї зусилля $p_i\ (i=1,\dots,N-1)$, ми тим самим співвідношеннями /6/, /4/ встановлюємо закон розподілу температурних переміщень і напружень у довільній точці багатошарового циліндра.

До цих пір припускалося, що температура $T=T(r)$ – відома функція. Якщо ж температура в шаруватому циліндрі наперед не відома, то її слід знаходити з рівняння Лапласа в кожному шарі:

$$\Delta T_i \equiv \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dT_i(r)}{dr}\right)=0. \qquad /9/$$

Тут $T_i(r)\,(i=1,\dots,N)$ – температура в i-му шарі.



Розв"язок цього рівняння в круговому кільці має вигляд

$$T_i(r)=C_i\,\ln r+D_i\,. \qquad /10/$$

Для визначення постійних інтегрування C_i, D_i слід використати крайові умови та умови ідеального теплового контакту на лінії розділу матеріалів. Так, зокрема, якщо на вільній поверхні циліндра задана постійна температура T_0, то, використавши розв"язок /10/, отримаємо

$$T_i(r) = T_0 \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Для ілюстрації наведених вище результатів був проведений числовий аналіз напружено-деформованого стану при плоскій деформації тришарового циліндра у випадку задання температури зовнішнього середовища T_0. Циліндр складався із шарів, матеріали яких характеризуються такими пружними постійними:
$\bar{I}$ шар – $E_1 = 2 \cdot 10^6$ Н/м^2; $\nu_1 = 0,3$; $\alpha_1 = 8 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$;
$\bar{II}$ – $E_2 = 1,16 \cdot 10^6$ Н/м^2; $\nu_2 = 0,3$; $\alpha_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$;
$\bar{III}$ – $E_3 = 7 \cdot 10^5$ Н/м^2; $\nu_3 = 0,3$; $\alpha_3 = 11 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$. Результати обчислень при температурі зовнішнього середовища $T_0 = 100$ ^{0}С і значеннях безрозмірних радіусів шарів циліндра $R_1 = 0,6$; $R_2 = 0,8$; $R_3 = 1,0$ представлені на рисунку. Тут наведено залежності безрозмірних переміщень $u^* = u/R_3$ /лінія 1/ і напружень $\sigma_r^* = \sigma_r/E_1$, $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta/E_1$, $\sigma_z^* = \sigma_z/E_1$ /відповідно лінії 2, 3, 4/ від радіальної координати r.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90

УДК 539.3

Р.М.Луцишин

ПРО ЗГИН СМУГИ З КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ПРИ НЕПОВНОМУ КОНТАКТІ

Нехай у круговий отвір одиничного радіуса безмежної смуги /рис. 1/ вставлено колову шайбу з того ж матеріалу і такого ж радіуса. Смуга навантажена на нескінченності згинаючими моментами M і напруженнями p. Під дією цього навантаження одиничне коло γ розділяється на дві дуги: зону контакту (β, α) і вільну зону (α, β). Вважається, що тертя між берегом отвору і краєм шайби відсутнє.

Розв"язання цієї задачі, згідно з працею Д.В.Грилицького, Р.М.Луцишина*, зводиться до системи задач лінійного спряження

*Грилицький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов. Львів, 1975.