

розв'язок /10/, отримаємо

$$T_i(r) = T_0 \quad (i=1, \dots, N).$$

Для ілюстрації наведених вище результатів був проведений числовий аналіз напружено-деформованого стану при плоскій деформації тришарового циліндра у випадку задання температури зовнішнього середовища T_0 . Циліндр складався із шарів, матеріали яких характеризуються такими пружними постійними: I шар - $E_1 = 2 \cdot 10^6$ Н/м²; $\nu_1 = 0,3$; $\alpha_1 = 8 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹; II - $E_2 = 1,16 \cdot 10^6$ Н/м²; $\nu_2 = 0,3$; $\alpha_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹; III - $E_3 = 7 \cdot 10^5$ Н/м²; $\nu_3 = 0,3$; $\alpha_3 = 11 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹. Результати обчислень при температурі зовнішнього середовища $T_0 = 100$ °С і значеннях безрозмірних радіусів шарів циліндра $R_1 = 0,6$; $R_2 = 0,8$; $R_3 = 1,0$ представлені на рисунку. Тут наведено залежності безрозмірних переміщень $u^* = u/R_3$ /лінії 1/ і напружень $\sigma_r^* = \sigma_r/E_1$, $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta/E_1$, $\sigma_z^* = \sigma_z/E_1$ /відповідно лінії 2, 3, 4/ від радіальної координати r .

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90

УДК 539.3

Р.М.Луцишин

ПРО ЗГИН СМУГИ З КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ПРИ НЕПОВНОМУ КОНТАКТІ

Нехай у круговий отвір одиничного радіуса безмежної смуги /рис. 1/ вставлено колову шайбу з того ж матеріалу і такого ж радіуса. Смуга навантажена на нескінченності згинаючими моментами M і напруженнями P . Під дією цього навантаження одиничне коло γ розділяється на дві дуги: зону контакту (β, α) і вільну зону (α, β) . Вважається, що тертя між берегом отвору і краєм шайби відсутнє.

Розв'язання цієї задачі, згідно з працею Д.В.Гриліцького, Р.М.Луцишина*, зводиться до системи задач лінійного спряження

© Луцишин Р.М., 1991

* Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов. Львів, 1975.

$$\begin{aligned} [F(t)+H(t)]^+ + [F(t)+H(t)]^- &= 2f(t); \\ [F(t)-H(t)]^+ - [F(t)-H(t)]^- &= 0, \quad t \in \gamma, \end{aligned} \quad /1/$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (\alpha, \beta); \\ \frac{1}{t} \int_{\rho}^t \sigma_r(t) dt, & t \in (\beta, \alpha), \end{cases} \quad /2/$$

де $\sigma_r(t)$ - шукане контактне напруження.

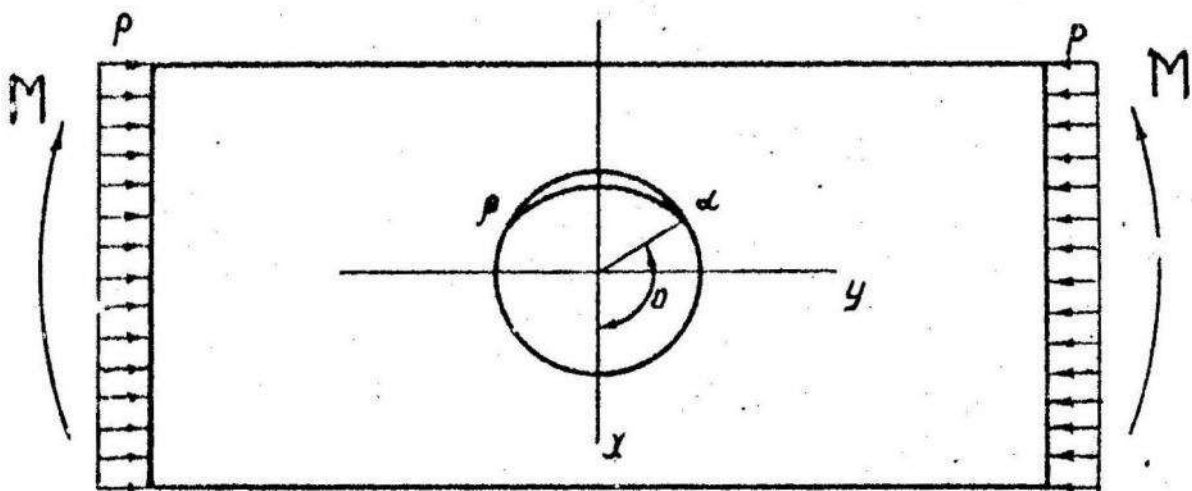


Рис. 1.

Функції $F(z)$ і $H(z)$ мають такі розклади при великих і малих значеннях $|z|$:

$$F(z) = \begin{cases} A_1 + A_2 z + \dots, & |z| < 1; \\ \frac{Mz}{8J} + \frac{1}{4}\rho + \frac{q_0}{z} + \dots, & |z| > 1; \end{cases}$$

$$H(z) = \begin{cases} \frac{M}{8Jz^3} + \frac{\rho}{2z^2} + \frac{M}{4Jz} + \left(\frac{1}{4}\rho + \bar{\delta}_1\right) + \dots, & |z| < 1; \\ \bar{A}_1 + \frac{\bar{B}_0 + 2A_2}{z} + \dots, & |z| > 1, \end{cases} \quad /3/$$

де J - момент інерції перерізу балки.

Розв'язок системи /1/ з урахуванням /3/ має вигляд

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{f(t)dt}{t-z} - \bar{A}_1, & |z| < 1; \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{f(t)dt}{t-z} + \frac{Mz}{8J} + \frac{1}{4}\rho - \frac{M}{8Jz^3} - \frac{\rho}{2z^2} - \frac{M}{4Jz}, & |z| > 1; \end{cases}$$

$$H(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{f(t)dt}{t-z} - \frac{Mz}{8J} - \frac{1}{4}\rho + \frac{M}{8Jz^3} + \frac{\rho}{2z^2} + \frac{M}{4Jz}, & |z| < 1; \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{f(t)dt}{t-z} + \bar{A}_1, & |z| > 1; \end{cases} \quad /4/$$

$$A_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{f(t)dt}{t}.$$

Задовольняючи умову контакту $v_r^+ - v_r^- = 0$ на (β, α) , приходимо до сингулярного інтегрального рівняння щодо шуканої функції $f(t)$:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{f(t) - \frac{\sigma}{t} \bar{f}(\bar{t})}{t - \sigma} dt - 2A_1 - \frac{M}{8J} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) - \frac{\rho}{2} - \frac{M}{J} \left(\frac{1}{\sigma^3} + \sigma^3 \right) + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{\sigma^2} + \sigma^2 \right) - \frac{M}{4J} \left(\frac{1}{\sigma} + \sigma \right) = 0, \sigma \in (\beta, \alpha). \quad /5/$$

Формула обертання цього рівняння

$$f(t) - \bar{f}(\bar{t}) = X^*(t) \left[\mathcal{Q}_2 t^2 + \mathcal{Q}_1 t + \mathcal{Q}_0 + \frac{\mathcal{Q}_{-1}}{t} + \frac{\mathcal{Q}_{-2}}{t^2} + \frac{\mathcal{Q}_{-3}}{t^3} \right] = S(t), \quad /6/$$

де

$$X(z) = \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)},$$

$$\mathcal{Q}_2 = -\mathcal{Q}_{-3} = -\frac{M}{16J}; \quad \mathcal{Q}_1 = -\mathcal{Q}_{-2} = \frac{\rho}{2} - \frac{M}{16J} \cos \theta;$$

$$\mathcal{Q}_0 = -\mathcal{Q}_{-1} = -\frac{M}{32J} (10 - 3 \sin^2 \theta) + \frac{\rho}{2} \cos \theta. \quad /7/$$

із /6/, враховуючи /2/, отримуємо

$$\sigma_r(t) = \frac{1}{2} \left(t \frac{dS}{dt} - \int \frac{S(t)}{t} dt \right) + d,$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(S(t) - \int \frac{S(t)}{t} dt \right) + d. \quad /8/$$

Із рівності нулеві напруження $\sigma_r(t)$ в кінцевих точках зони контакту α і β отримується залежність величини зони контакту θ від зовнішнього навантаження

$$\frac{1 + 3 \cos \theta}{13 \cos^2 \theta + 6 \cos \theta + 7} = \frac{M}{4 \mathcal{J} p}, \quad /9/$$

а також стала інтегрування d :

$$d = (1 + \cos \theta) \left[\frac{M}{32 \mathcal{J}} (10 - 5 \sin^2 \theta + 2(1 - \cos \theta)) + \frac{1}{4} p (1 - 3 \cos \theta) \right] \ln 2 |\sin \theta|. \quad /10/$$

Підставляючи /7/ і /10/ у /8/, отримуємо вирази для шуканої функції:

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2} \chi'(t) \left\{ \frac{M}{32 \mathcal{J}} \left[-\frac{4}{3} t^2 - \frac{4}{3} t \cos \theta + (2 \sin^2 \theta - \frac{4}{3}) + \frac{1}{t} \left(\frac{56}{3} - 4 \sin^2 \theta \right) + \right. \right. \\ & + \frac{8}{3} \frac{\cos \theta}{t^2} + \frac{8}{3} \frac{1}{t^3} \left. \right] - p \left(\frac{\cos \theta}{t} + \frac{1}{t^2} \right) \right\} - \frac{1 + \cos \theta}{2} \left\{ \frac{M}{32 \mathcal{J}} (10 - 5 \sin^2 \theta + \right. \\ & + 2(1 - \cos \theta)) + \frac{1}{4} p (1 - 3 \cos \theta) \left. \right\} \ln \left[4(1 - \cos \theta) \left(t + (1 - \cos \theta) + \frac{1}{t} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \chi'(t) \left(1 + \frac{1}{t} \right) \right) \right] + d \end{aligned} \quad /11/$$

і шуканого контактного напруження

$$\begin{aligned} \sigma_r(\varphi) = & \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2 |\cos \theta - \cos \varphi|}} \left\{ \frac{M}{32 \mathcal{J}} \left(2 \sin \frac{5\varphi}{2} + 2 \cos \theta \sin \frac{3\varphi}{2} + \right. \right. \\ & + (10 - \sin^2 \theta) \sin \frac{\varphi}{2} \left. \right) - \frac{1}{2} p \left(\sin \frac{3\varphi}{2} + \cos \theta \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left. \right\} + \\ & + \frac{\sqrt{2 |\cos \theta - \cos \varphi|}}{2} \left\{ \frac{M}{32 \mathcal{J}} \left[-\frac{26}{3} \cos \frac{5\varphi}{2} - \frac{14}{3} \cos \theta \cos \frac{3\varphi}{2} + \left(\sin^2 \theta + \frac{22}{3} \right) \cos \frac{\varphi}{2} \right] + \right. \\ & + p \cos \frac{3\varphi}{2} \left. \right\} - \frac{1 + \cos \theta}{2} \left\{ \frac{M}{32 \mathcal{J}} (10 - 5 \sin^2 \theta + 2(1 - \cos \theta)) + \right. \\ & + \frac{1}{4} p (1 - 3 \cos \theta) \left. \right\} \ln \left[\frac{1 + 2 \cos \varphi - \cos \theta + 2 \sqrt{2 |\cos \theta - \cos \varphi|}}{1 + \cos \theta} \cos \frac{\varphi}{2} \right]. \quad /12/ \end{aligned}$$

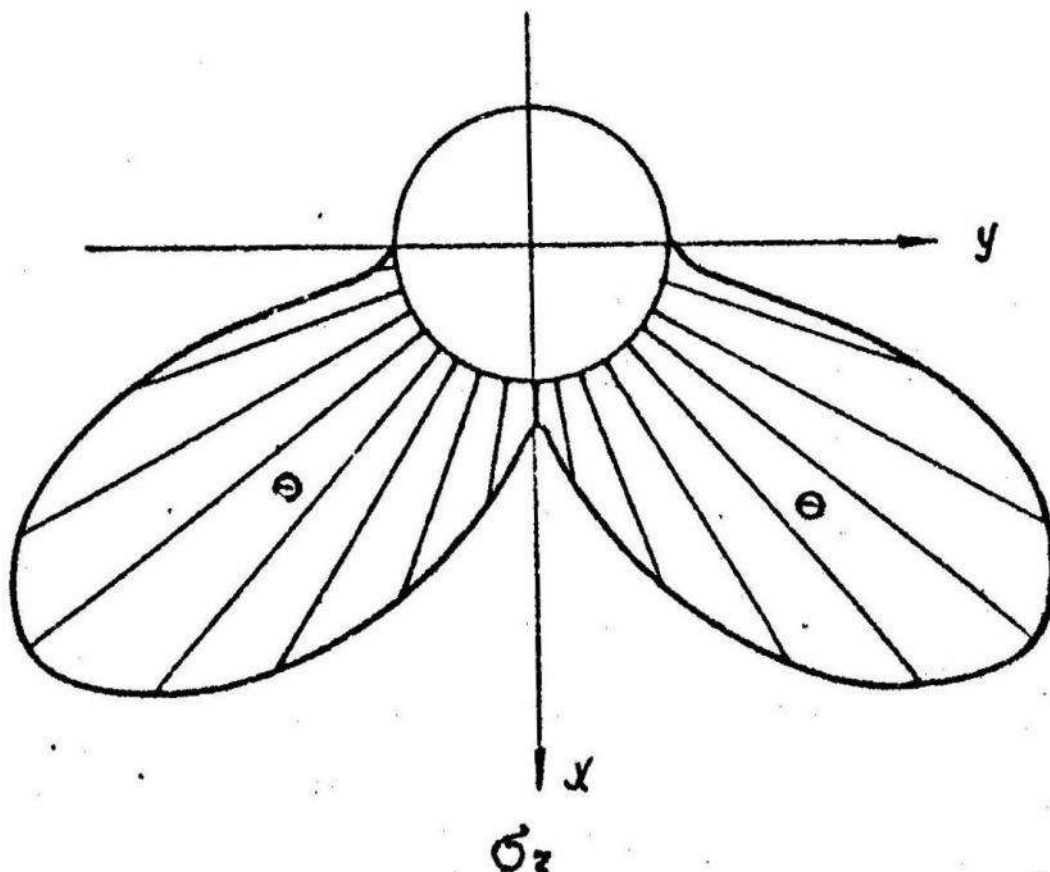


Рис. 2.

Як приклад розглянемо випадок, коли зона контакту становить половину кола, тобто $\theta = \pi/2$. З формули /9/ випливає, що це досягається при такому підборі навантаження $M/J = 16/7\rho$, причому $M < 0$ і $\rho < 0$. Результати підрахунку контактних напружень σ_r за формулою /12/ зображені на рис. 2.

Стаття надійшла до редколегії 02.02.90