УДК 517.512

Я.Г.Притула

ПРО ЗБІЖНІСТЬ МАЙЖЕ ВСЮДИ РЯДІВ ФУР"Є МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо тригонометричний ряд

$$T(x)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} c_\lambda e^{i\lambda x} \qquad x\in\mathbb{R},$$

де множина $\Lambda=\{\lambda \mid c_\lambda\neq 0\}$ - зачисленна і сума

$$S_\omega(x)=\sum_{|\lambda|\leq\omega} c_\lambda e^{i\lambda x}$$

має сенс /наприклад, $\sum_{|\lambda|\leq\omega}|c_\lambda|<\infty$/.

Відомо /теорема Карлесона/, що з умов

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}|c_\lambda|^2<\infty \quad \text{і} \quad \Lambda=\mathbb{Z}$$

випливає збіжність майже всюди ряду $T(x)$. Для майже періодичних функцій, в силу довільності Λ, така теорема не має місця. Це доведено у праці [1]. Там же доведено, що збіжність майже всюди забезпечує умова

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\leq\lambda<m+1}|c_\lambda|\Big)^2<\infty . \qquad /1/$$

Ця умова є у праці Вінера [4], де він показав, що з умови /1/ випливає існування S^2 майже періодичної функції $f(x)$ з рядом Фур"є $T(x)$, який S^2 збігається до $f(x)$.

Торнехаве і Фьольнер [3] показали, що для S^2 майже періодичної функції, у якої коефіцієнти Фур"є $c_\lambda>0$, умова Вінера /1/ виконується, а отже, ряд Фур"є збігається майже всюди.

Наступна теорема є узагальненням цього твердження.

Теорема. Якщо для послідовності показників Фур"є S^2 - м.п. функції $\Lambda=\{\lambda_n\}$ і відповідної послідовності аргументів $\{\theta_k\}=\{\arg c_{\lambda_k}\}$ існує α $(0\leq\alpha<\pi/4)$, для якого система нерівностей

$$|\lambda_k t+\theta_k|\leq\alpha \pmod{2\pi} \qquad /2/$$

має розв"язок, то умова Вінера виконується, а отже, ряд Фур"є збігається майже всюди.

Очевидно, що за умови $C_\lambda > 0$ система завжди має розв"язок $(t=0)$. Система /2/ також має розв"язок, якщо система $\{\lambda_k\}$ – лінійно незалежна над полем раціональних чисел. Це випливає з теореми Кронеккера.

Для доведення теореми скористаємось таким твердженням.

Лема. Якщо для комплексних чисел $a_1 a_2 \ldots a_n$ виконується умова

$$a \leq \arg a_i \leq a + \alpha_0 , \quad 0 \leq \alpha_0 < \pi, \quad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

тоді

$$\cos\frac{\alpha_0}{2} \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| .$$

Доведення теореми. Нехай $p(t) = e^{-t^2/2}$

$$e_{n+1} = p(n), \quad n = 0, 1, \ldots \quad , \quad e_0 = 1 .$$

Зрозуміло, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\lambda t} dt = (2\pi)^{1/2} p(\lambda). \qquad /3/$$

Визначимо норму

$$(D_E[f(t)])^2 = \sup_u \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \, | f(x+u)|^2 dt . \qquad /4/$$

Мають місце співвідношення / K_i – константи/

$$K_1 (D_{S^2}[f(t)])^2 \leq (D_E[f(t)])^2 \leq K_2 (D_{S^2}[f(t)])^2 . \qquad /5/$$

Нехай $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}$ – поліном або абсолютно збіжний ряд і послідовності $\{\lambda_k\}$ і $\{\theta_k = \arg c_k\}$ задовольняють умови теореми. Тоді з /3/

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) [T(t+u)]^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m \bar{c}_n \, e^{i(\lambda_m - \lambda_n)u} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{i(\lambda_m - \lambda_n)t} dt = (2\pi)^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m \bar{c}_n \, e^{i(\lambda_m - \lambda_n)u} p(\lambda_m - \lambda_n),$$

з /4/, /5/ одержуємо

$$(D_{S^2}[T(t)])^2 \leq K_3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_m| |c_n| \, p(\lambda_m - \lambda_n) ,$$

$$(D_{S^2}[T(t)])^2 = \sup_u \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \, | T(t+u) | \, dt =$$

$$=\sup_u (2\pi)^{1/2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|c_m||c_n|e^{i(\lambda_m u+\theta_m)}e^{-i(\lambda_n u+\theta_n)}\rho(\lambda_m-\lambda_n).$$

З умов теореми і леми записуємо

$$(D_{S^2}[T(t)])^2 \geq (2\pi)^{1/2}\cos 2\alpha \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n||c_m|\rho(\lambda_m-\lambda_n). \qquad /6/$$

Введемо позначення

$$\mathbb{C}_m=\sum_{m\le\lambda_\mu<m+1}|c_\mu|$$

і

$$S_{m,n}=\sum_{\substack{m\le\lambda_\mu<m+1\\ n\le\lambda_\nu<n+1}}\rho(\lambda_\mu-\lambda_\nu)|c_\mu||c_\nu|.$$

Очевидно, що

$$S_{m,n}\le e_{|m-n|}\sum_{\substack{m\le\lambda_\mu<m+1\\ n\le\lambda_\nu<n+1}}|c_\mu||c_\nu|=e_{|m-n|}\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n .$$

Аналогічно

$$S_{m,n}\ge\rho(|m-n|+1)\,\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n .$$

З нерівності /6/ маємо

$$(D_{S^2}[T(t)])^2\ge(2\pi)^{1/2}\cos 2\alpha\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho(|m-n|+1)\,\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n .$$

Відкинувши члени з $m\neq n$, одержимо

$$(D_{S^2}[T(t)])^2\ge(2\pi)^{1/2}\cos 2\alpha\sum_{m=-\infty}^{\infty}\rho(1)\,\mathbb{C}_m^2=K_4\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbb{C}_m^2 . \qquad /7/$$

Розглянемо послідовність поліномів Бохнера-Фейєра для функції $f(t)$ [2]

$$S_N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_{N,n}A_n e^{i\lambda_n t},$$

яка збігається в метриці S^2 до $f(t)$. Послідовність $K_{N,n}$ задовольняє умови

$$0\le K_{N,n}\le 1,\quad K_{N,n}=0 \quad \text{при} \quad n>N,$$

$$\lim_{N\to\infty}K_{N,n}=1 .$$

Згідно з доведеною нерівністю /7/

$$K_4\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{m\le\lambda_n<m+1}K_{N,n}|A_n|\Big)^2\le\big(D_{S^2}[S_N(t)]\big)^2$$

Звідси для довільного ρ

$$K_4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m \le \lambda_n < m+1 \\ n \le \rho}} K_{N,n} |A_n| \Big)^2 \le \left(D_{S^2}[S_N(t)] \right)^2 .$$

При $N \to \infty$ одержуємо

$$K_4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m \le \lambda_n < m+1 \\ n < \rho}} |A_n| \Big)^2 \le \left(D_{S^2}[f(t)] \right)^2 .$$

Тепер при $\rho \to \infty$ для довільного M маємо

$$K_4 \sum_{m=-M}^{M} \Big(\sum_{m \le \lambda_n < m+1} |A_n| \Big)^2 \le \left(D_{S^2}[f(t)] \right)^2 .$$

Теорема доведена.

1. Г у н и я Н.Г. Замечание о сходимости рядов Фурье почти периодических функций Степанова // Тр. Тбилис. мат. ин-та. 1985. Т.76. С. 3-17. 2. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., 1953. 3. Tornehawe H. On the Fourier series of Stepanov almost-periodic functions // Math. Scand. 1954. Vol.2. P.237-242. 4. Wiener N. On the representation of function by trigonometrical integrals // Math. Z. 1926. Vol.24. P.575-616.

Стаття надійшла до редколегії 02.10.90

УДК 517.956

В.М.Кирилич

ЗАДАЧА ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ ОДНОВИМІРНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

В області $G=\{x,t: 0<x<l, 0<t<T\}$ розглядається система

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}(x,t)u_j + r_{ij}(x,t) f_j(t)\right] + q_i(x,t), \quad i=\overline{1,n} \qquad /1/$$

де $\lambda_i, a_{ij}, r_{ij}, q_i$ – задані, рівномірно неперервні в G, а u_i, f_i – невідомі функції.

Припустимо, що при всіх $(x,t)\in G$:

$$\lambda_1(x,t)\le\ldots\le\lambda_k(x,t)<0<\lambda_{k+1}(x,t)\le\ldots\le\lambda_n(x,t) \quad (0<k<n).$$