Звідси для довільного ρ

$$K_4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m \le \lambda_n < m+1 \\ n \le \rho}} K_{N,n} |A_n| \Big)^2 \le \big(D_{S^2}[S_N(t)] \big)^2.$$

При $N \to \infty$ одержуємо

$$K_4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m \le \lambda_n < m+1 \\ n < \rho}} |A_n| \Big)^2 \le \big(D_{S^2}[f(t)] \big)^2.$$

Тепер при $\rho \to \infty$ для довільного M маємо

$$K_4 \sum_{m=-M}^{M} \Big(\sum_{m \le \lambda_n < m+1} |A_n| \Big)^2 \le \big(D_{S^2}[f(t)] \big)^2.$$

Теорема доведена.

1. Гуния Н.Г. Замечание о сходимости рядов Фурье почти периодических функций Степанова // Тр. Тбилис. мат. ин-та. 1985. Т.76. С. 3-17. 2. Левитан Б.М. Почти периодические функции. М., 1953. 3. Tornehawe H. On the Fourier series of Stepanov almost-periodic functions // Math. Scand. 1954. Vol.2. P.237-242. 4. Wiener N. On the representation of function by trigonometrical integrals // Math. Z. 1926. Vol.24. P.575-616.

Стаття надійшла до редколегії 02.10.90

УДК 517.956

В.М.Кирилич

ЗАДАЧА ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ ОДНОВИМІРНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

В області $G = \{x,t: 0<x<l, 0<t<T\}$ розглядається система

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t) \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(x,t) u_j + r_{ij}(x,t) f_j(t)] + q_i(x,t), \quad i=\overline{1,n} \qquad /1/$$

де $\lambda_i, a_{ij}, r_{ij}, q_i$ – задані, рівномірно неперервні в G, а u_i, f_i – невідомі функції.

Припустимо, що при всіх $(x,t) \in G$:

$$\lambda_1(x,t) \le \ldots \le \lambda_k(x,t) < 0 < \lambda_{k+1}(x,t) \le \ldots \le \lambda_n(x,t) \quad (0<k<n).$$

При цих умовах для фіксованого значення індексу $i\,(1\leq i\leq n)$ через кожну точку $(x,t)\in G$ проходить одна характеристика $\xi=\varphi_i(\tau;x,t)$, яка визначається задачею Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\lambda_i(\xi,\tau),\ \ \xi(t)=x. \qquad /2/$$

Позначимо для зручності

$$F_i(x,t,u)\equiv\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_j(x,t)+q_i(x,t),\quad i=\overline{1,n}.$$

Задача полягає у визначенні функцій $u\in C(G)$, $f\in C[0,T]$ з умов:

$$u_i(x,0)=g_i(x),\ 0\leq x\leq l,\ \ i=\overline{1,n}; \qquad /3/$$

$$u_i(0,t)=H_i(t),\ 0\leq t\leq T,\ i=\overline{1,k}; \qquad /4/$$

$$u_i(l,t)=H_i(t),\ 0\leq t\leq T,\ i=\overline{k+1,n}; \qquad /5/$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\alpha_{si}(x,t)u_i(x,t)\,dx=h_s(t),\ 0\leq t\leq T,\ s=\overline{1,n}. \qquad /6/$$

Тут g_i, H_i, α_{si}, h_s – задані функції.

У близькій постановці для x – гіперболічної системи, у відсутності /6/, обернена задача розглядалася в праці [3]. Для параболічних рівнянь задачі з інтегральними перевизначеннями вивчались у праці [5]. "Прямі" задачі з інтегральними умовами для гіперболічних систем розглянуті в статті [2].

Введемо матрицю

$$A(t)=\left\|\int_0^l\alpha(x,t)r(x,t)\,dx\right\|$$

/ α, r – матриці, складені з відповідних елементів α_{si}, r_{ij} /.

Припустимо, що

$$\det A(t)\neq 0,\quad 0\leq t\leq T \qquad /7/$$

і виконуються умови узгодження

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\alpha_{si}(x,0)g_i(x)\,dx=h_s(0),\ \ s=\overline{1,n},$$

$$H_i(0)=\begin{cases}g_i(0),\ i=\overline{1,k},\\ g_i(l),\ i=\overline{k+1,n}.\end{cases} \qquad /8/$$

Лема 1. Функції $\varphi_i\ (i=\overline{1,n})$ при $(x,t)\in G,\ 0\leq\tau\leq t$ – неперервно диференційовані, причому мають місце формули

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x}=\exp\Big(-\int_\tau^t\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\Big); \qquad /9/$$

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial t}=-\lambda_i(x,t)\exp\Big(-\int_\tau^t\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\Big). \qquad /10/$$

Доведення. Неперервна диференційовність функцій φ_i відома з теорем звичайних диференціальних рівнянь. Формули /9/–/10/ одержуються за допомогою інтегрування рівняння у варіаціях для /2/ [4, § 21, задача 3].

Лема 2. Функції $t_i(x,t)$ /ордината точки перетину i-ї характеристики з прямими $\xi=0\ (i=\overline{1,k})$ і $\xi=l\ (i=\overline{k+1,n})$/ при $(x,t)\in G$ – неперервно диференційовані, причому

$$\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}=-\frac{1}{\lambda_i(\varphi_i(t_i(x,t);x,t),t_i(x,t))}\times$$

$$\times\exp\Big(-\int_{t_i(x,t)}^t\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\Big); \qquad /11/$$

$$\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}=\frac{\lambda_i(x,t)}{\lambda_i(\varphi_i(t_i(x,t);x,t),t_i(x,t))}\times$$

$$\times\exp\Big(-\int_{t_i(x,t)}^t\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\Big). \qquad /12/$$

Доведення. Виходячи з означення $t_i(x,t)$, маємо $\varphi_i(t_i(x,t);x,t)\equiv 0,\ i=\overline{1,k},\ \varphi_i(t_i(x,t);x,t)\equiv l,\ i=\overline{k+1,n}$. Згідно з /2/

$$\left.\frac{\partial\varphi_i(s;x,t)}{\partial s}\right|_{s=t_i(x,t)}=\lambda_i(\varphi_i(s;x,t),s)\Big|_{s=t_i(x,t)}\neq 0.$$

Тоді на основі теореми про неявну функцію одержуємо неперервну диференційовність $t_i(x,t)$ в G. Далі, диференціюючи ці тотожності по x або по t, враховуючи /9/–/10/, одержимо /11/–/12/.

Лема 3. Для рівномірно неперервних на G функцій u, f система /1/ рівносильна системі інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \omega_i(x,t) + \int\limits_{\gamma_i(x,t)}^{t} \Big[F_i(\varphi_i(\tau;x,t), \tau, u) + \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) f_j(\tau) \Big] d\tau, \quad (x,t) \in G, \ i = \overline{1,n}, \qquad /13/$$

де

$$\omega_i(x,t) = \begin{cases} H_i(t_i(x,t)), & \text{при } 0 \le x \le \varphi_1(t;0,0), \ i = \overline{1,k}, \\ g_i(\varphi_i(0;x,t)), & \text{при } \varphi_1(t;0,0) \le x \le l, \ i = \overline{1,n}, \\ H_i(t_i(x,t)), & \text{при } \varphi_n(t;l,0) \le x \le l, \ i = \overline{k+1,n}, \end{cases}$$

$$\begin{matrix} t_i(x,t), & \text{при } 0 \le x \le \varphi_1(t;0,0), \ i = \overline{1,k}, \\ 0, & \text{при } \varphi_1(t;0,0) \le x \le \varphi_n(t;l,0), \ i = \overline{1,n}, \\ t_i(x,t) & \text{при } \varphi_n(t;l,0) \le x \le l, \ i = \overline{k+1,n}. \end{matrix}$$

Доведення. Перехід від /1/, /3/-/5/ одержуємо за допомогою підстановки в /1/ замість x, t значень $\xi = \varphi_i(\tau;x,t)$, τ і інтегрування по τ від $\gamma_i(x,t)$ до t, тобто інтегрування вздовж характеристик i-ї сім"ї. Зворотний перехід здійснюється за допомогою цієї ж підстановки в /13/ і наступного диференціювання по τ при $\tau = t$, тобто диференціювання вздовж характеристики i-ї сім"ї [1].

Теорема. Нехай
1/ функції $\lambda_i \in C^2(G)$, $i = \overline{1,n}$; 2/ функції a_{ij}, r_{ij}, $q_i \in C(G)$, $i,j = \overline{1,n}$; 3/ функції $g_i \in C[0,l]$, $i = \overline{1,n}$;
4/ функції $H_i \in C[0,T]$, $h_i \in C^1[0,T]$, $i = \overline{1,n}$;
5/ виконуються умови /7/-/8/.

Тоді задача /1/-/6/ має в G єдиний неперервний узагальнений розв"язок ($u \in C(G)$, $f \in C[0,T]$).

Доведення. Підставивши /13/ в /6/, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{0}^{\varphi_i(t;0,0)} \alpha_{si}(x,t) \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) f_j(\tau) d\tau dx +$$

$$
+\sum_{i=1}^{\kappa}\int\limits_{\varphi_i(t;0,0)}^{l}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{0}^{t}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)f_j(\tau)\,d\tau\,dx\,+
$$

$$
+\sum_{i=\kappa+1}^{n}\int\limits_{0}^{\varphi_i(t;l,0)}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{0}^{t}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)f_j(\tau)\,d\tau\,dx\,+
$$

$$
+\sum_{i=\kappa+1}^{n}\int\limits_{\varphi_i(t;l,0)}^{l}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)f_j(\tau)\,d\tau\,dx\,+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{\kappa}\int\limits_{0}^{\varphi_i(t;0,0)}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u)\,d\tau\,dx\,+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{\kappa}\int\limits_{\varphi_i(t;0,0)}^{l}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{0}^{t}F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u)\,d\tau\,dx\,+
$$

$$
+\sum_{i=\kappa+1}^{n}\int\limits_{0}^{\varphi_i(t;l,0)}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{0}^{t}\sum_{j=1}^{n}F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u)\,d\tau\,dx\,+
$$

$$
+\sum_{i=\kappa+1}^{n}\int\limits_{\varphi_i(t;l,0)}^{l}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\sum_{j=1}^{n}F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u)\,d\tau\,dx\,\cdot \qquad /14/
$$

$$
=G_s(t)\,,\quad s=\overline{1,n}\,,
$$

де через $G_s(t)$ позначені вирази, в які не входять u і f

Таким чином, задача звелася до знаходження системи неперервних функцій $\{u_i(x,t)\}, \{f_i(x,t)\}$, для яких виконуються співвідношення /13/–/14/.

Із формул /11/ бачимо, зокрема, що $\frac{\partial t_i}{\partial x} \neq 0$ в G і тому, на основі теореми про неявну функцію, в G рівняння $\tau = t_i(x,t)$ можна розв"язати відносно x . Позначимо одержану функцію через $x = \rho_i(\tau, t)$; в силу цієї ж теореми вона неперервно диференційована.

Використовуючи введені функції ρ_i , формули /7/, /9/–/10/, враховуючи, що $(\varphi_i(t;0,0),t) \equiv 0 \ (i = \overline{1,k})$, $(\varphi_i(t;l,0),t) \equiv 0$ $(i = \overline{k+1,n})$, і зробивши деякі перетворення в /14/ /перестановка порядку інтегрування, заміна змінної інтегрування диференціювання по t /, приходимо до рівності

$$f(t) = (Lf)(t) + (\tilde{L}u)(t) + \Phi(t), \qquad /15/$$

де $f = col(f_1, \dots, f_n)$, $u = col(u_1, \dots, u_n)$, L, $\tilde{L}$ – матричні лінійні оператори типу Вольтерра, елементи яких мають неперервні ядра, що діють відповідно на вектор-функцію f і u ; Φ – відомий неперервний стовпчик висоти n .

Рівняння /13/ має вигляд

$$u(x,t) = \omega(x,t) + (L_1 f)(x,t) + (\tilde{L}_1 u)(x,t), \qquad /16/$$

де ω – відомий неперервний стовпчик, L_1, $\tilde{L}_1$ – інтегральні оператори типу Вольтерра.

Отже, для визначення функцій u , f ми одержали систему лінійних інтегральних рівнянь /15/–/16/ типу Вольтерра другого роду, яку можна розв"язати стандартним методом ітерацій.

1. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып. 3. С.87-104. 2. Мельник З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т.21. № 2. С.246-253. 3. Орловский Д.Г. К задаче определения правой части гиперболической системы // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19. № 8. С.137-146. 4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964. 5. Соловьев В.В. Одна одномерная обратная задача для уравнения теплопроводности с интегральным переопределением // Функциональные методы в задачах математической физики: Сб. науч. тр. М., 1985. С.54-56.

Стаття надійшла до редколегії 02.10.90