УДК 517.917

Л.М.Лісович

ОДНА ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ І ЄДИНОСТІ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З СУМОВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Означення 1. Функцію $f(x,y)$ називатимемо обмеженою за типом I в області $\mathcal{D}=\{x_0\le x\le x_0+H;\ y_0-a\le y\le y_0+a\}$, якщо для $(x,y)\in\mathcal{D}$

$$\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,y)|^p dt\right\}^{1/p}< A, \qquad /1/$$

де A – стала, яка не залежить від $(x,y)\in\mathcal{D}$, $p\ge 1$.

Означення 2. Будемо вважати, що функція $f(x,y)$ задовольняє умову типу II по y в області $\mathcal{D}$, якщо рівномірно стосовно $x\in[x_0,x_0+H]$ та $\bar{y},\bar{\bar{y}}\in[y_0-a,y_0+a]$ виконується нерівність

$$\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,\bar{y})-f(t,\bar{\bar{y}})|^p dt\right\}^{1/p}\le L|\bar{y}-\bar{\bar{y}}|, \qquad /2/$$

де L – стала, незалежна від x.

Розглянемо тепер скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \qquad /3/$$

Теорема 1. Нехай у рівнянні /3/ $f(x,y)$ – сумовна по x функція разом зі своїм p-м степенем $(p\ge 1)$ на відрізку $X=[x_0,x_0+H]$ рівномірно стосовно $y\in Y=[y_0-a,y_0+a]$ неперервна по $y\in Y$ і задовольняє умови /1/ та /2/ майже всюди в області $\mathcal{D}$. Тоді рівняння /3/ майже всюди на відрізку $X'=\{x_0\le x\le x_0+h\}$, де $h=min\left(\frac{1}{L},\frac{a}{A}\right)$ має єдиний розв"язок $y(x)$ такий, що

$$y(x)\in[y_0-a,y_0+a],\ y(x_0)=y_0,\ |y(x+\Delta x)-y(x)|<A|\Delta x|.$$

Доведення. Зауважимо, що майже всюди на $[x_0,x_0+H]$

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt=f(x,\varphi(x)).$$

Тому рівняння /3/ еквівалентне майже всюди на X інтегральному рівнянню

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt. \qquad /4/$$

Доведення теореми проведемо методом послідовних наближень, прийнявши

$$y_0(x)=y(x_0)=y_0\ ;$$

$$y_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_k(t))dt\ ,\quad (k=0,1,2,\dots). \qquad /5/$$

Розглянемо відрізок $[x_0, x_0+h]$ /для відрізка $[x_0-h, x_0]$ доведення аналогічне/ і покажемо перш за все, що функції $y_k(x)$ існують, є неперервні та диференційовні майже всюди на $[x_0, x_0+h]$ та задовольняють нерівності

$$|y_k(x)-y_0|\le A|x-x_0|,\quad x\in[x_0, x_0+h]. \qquad /6/$$

Зрозуміло, що нульове наближення y_0 задовольняє ці умови. Припустимо, що $y_k(x)$ також задовольняє ці умови. Тоді функція $f(x,y_k(x))$ є сумовна на $[x_0, x_0+h]$. Використовуючи тепер умову /1/ та нерівність Гельдера, маємо

$$|y_{k+1}(x)-y_0|\le\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x}^{x_0}|f(t,y_k(t))|^p dt\right\}^{1/p}|x-x_0|\le A|x-x_0|<a,$$

якщо лиш $|x-x_0|<\frac{a}{A}$.

Звідси випливає, що всі наближення належать до області

$$\mathcal{D}'=\{x_0\le x\le x_0+h\ ;\ y_0-a\le y\le y_0+a\}.$$

Далі

$$|y_k(x+\Delta x)-y_k(x)|\le\left\{\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}|f(t,y_{k-1}(t))|^p dt\right\}^{1/p}|\Delta x|\le A|\Delta x|,$$

тобто всі наближення неперервні на $[x_0, x_0+h]$.

Оскільки функція $f(x,y_k(x))$ сумовна по x і неперервна по y_k, то майже всюди в $[x_0, x_0+h]$ існує похідна $\frac{dy_k}{dx}$, тобто кожне наближення $y_k(x)$ диференційовне майже всюди в $[x_0, x_0+h]$.

Покажемо тепер, що послідовність $\{y_k(x)\}$ рівномірно збіжна майже всюди на $[x_0, x_0+h]$. Для цього, як відомо, досить показати, що ряд

$$y_0+\sum_{k=0}^{\infty}(y_{k+1}(x)-y_k(x)) \qquad /7/$$

є рівномірно збіжним майже всюди на $[x_0, x_0+h]$. Маємо

$$|y_1(x)-y_0|\le A|x-x_0|. \qquad /8/$$

Далі на основі умов теореми, нерівності Гельдера та /8/ отримуємо

$$|y_2(x)-y_1(x)| \le \left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t))-f(t,y_0)|^p dt\right\}^{1/p}|x-x_0| \le$$

$$\le L|y_1(x)-y_0||x-x_0| \le AL|x-x_0|^2 \qquad /9/$$

. . . .

$$|y_{k+1}(x)-y_k(x)| \le AL^k|x-x_0|^{k+1}. \qquad /10/$$

Якщо $|x-x_0|<\frac{1}{L}$, то ряд

$$A\sum_{k=0}^{\infty}L^k|x-x_0|^{k+1}$$

збіжний. Тому ряд /7/, коли $|x-x_0|<\min\left(\frac{1}{L},\frac{a}{A}\right)$, є рівномірно збіжний майже всюди на $[x_0,x_0+h]$ до функції $y(x)$, причому $y(x)$ як рівномірна границя майже всюди на $[x_0,x_0+h]$ неперервних функцій є неперервною майже всюди на $[x_0,x_0+h]$. Оскільки існує рівномірна границя $\lim\limits_{k\to\infty}y_k(x)=y(x)$, то для $\delta>0$ можна вказати таке число $K=K(\delta)$, що коли $k>K$, то $|y_k(x)-y(x)|<\delta$. Тоді, використовуючи умови теореми та нерівність Гельдера, маємо

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_k(t))-f(t,y(t))]dt\right| \le$$

$$\le\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,y_k(t))-f(t,y(t))|^p dt\right\}^{1/p}|x-x_0|<L|y_k(x)-y(x)||x-x_0|<\delta,$$

тобто $y(x)$ є неперервним майже всюди на $[x_0,x_0+h]$ розв"язком рівняння /3/.

Залишилось довести, що цей розв"язок єдиний. Припустимо, що це не так, тобто рівняння /3/ має майже всюди на $[x_0,x_0+h]$ два різні розв"язки $y(x)$ і $z(x)$ такі, що $y(x_0)=z(x_0)=y_0$. Тоді, використавши умови /1/ та /2/ і нерівність Гельдера, отримаємо

$$|y(x)-z(x)|=\left|\int_{x_0}^{x_0}f(t,y(t))dt-\int_{x_0}^{x}f(t,z(t))dt\right| \le$$

$$\le\delta+\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,y(t))-f(t,z(t))|^p dt\right\}^{1/p}|x-x_0| \le$$

$$\le\delta+L|y(x)-z(x)||x-x_0| .$$

Звідси
$$|y(x)-z(x)| < \frac{\delta}{1-L|x-x_0|} \qquad /11/$$

Оскільки $|x-x_0| < \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{a}{A}\right\}$, а $\delta > 0$ як завгодно мале, то з /11/ випливає, що $y(x) \equiv z(x)$ майже всюди на $[x_0, x_0+h]$. Теорема доведена.

Теорема 1 легко узагальнюється на випадок, коли рівняння /3/ є векторним, тобто $f=\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, $y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Означення 3. Функцію $f(x,y)$ називатимемо обмеженою за типом 1 в області $\mathcal{D}$, якщо для $(x,y)\in\mathcal{D}$
$$\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\|f(t,y)\|^p dt\right\}^{1/p} < A, \qquad /12/$$

де A – стала, яка не залежить від $(x,y)\in\mathcal{D}$, $p\geq 1$.

Означення 4. Будемо вважати, що функція $f(x,y)$ задовольняє умову типу II по y в області $\mathcal{D}=X\times Y$, якщо рівномірно стосовно $x\in X$ і $\bar{y}, \bar{\bar{y}}\in Y$ виконується нерівність
$$\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\|f(t,\bar{y})-f(t,\bar{\bar{y}})\|^p dt\right\}^{1/p} \leq L\|\bar{y}-\bar{\bar{y}}\|, \qquad /13/$$

де L – стала, незалежна від x.

Теорема 2. Нехай у рівнянні /3/ функція $f(x,y)$ сумовна по x разом зі своїм p-м степенем $(p\geq 1)$ на відрізку $X=[x_0, x_0+H]$ рівномірно стосовно $y\in Y=[y_0-a, y_0+a]$, неперервна по $y\in Y$ і задовольняє майже всюди в області $\mathcal{D}=X\times Y$ умови /12/ і /13/. Тоді рівняння /3/ майже всюди на відрізку $X'=[x_0, x_0+h]$, де $h=\min\left\{\frac{1}{L}, \frac{a}{A}\right\}$, має єдиний розв"язок $y(x)$ такий, що
$$y(x)\in\mathcal{D}'=\{x_0\leq x\leq x_0+h;\ a-y_0\leq y\leq a+y_0\},\ y(x_0)=y_0,$$
$$\|y(x+\Delta x)-y(x)\| < A|\Delta x|.$$

Стаття надійшла до редколегії 02.10.90