ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
36
1991

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
Виходить з 1965 р.
Випуск 36

ПРИКЛАДНІ
ПИТАННЯ
МАТЕМАТИКИ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО «СВІТ»
1991

УДК 513

У Віснику містяться статті з теорії функцій, теорії чисел, алгебри, топології, механіки, диференціальних та інтегральних рівнянь та їх застосування.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

Бібліогр. в кінці статей.

В Вестнике содержатся статьи по теории функций, теории чисел, алгебре, топологии, механике, дифференциальным и интегральным уравнениям и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Библиогр. в конце статей.

Відповідальний за випуск доц. Є.М.П а р а с ю к

Адреса редколегії: 290000 Львів, вул. Університетська, 1. Університет, кафедра диференціальних рівнянь. Тел. 79-45-93.

Редакція науково-технічної літератури
Редактор Л.І.С і д л о в и ч

В $\frac{1602110000-015}{М225/04/-91}$ Замовне

УДК 517.95

С.П.Лавренюк

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ, ЩО СИЛЬНО ВИРОДЖУЄТЬСЯ

Розглянемо задачу

$$(p(x,t)u_t + c(x,t)u)_t + A(t)u = f(x,t),\ (x,t)\in Q_T; \qquad /1/$$

$$u(x,0)=0\ ,\ x\in D; \qquad /2/$$

$$u_t(x,0)=0\ ,\ x\in B; \qquad /3/$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \bar{n}^i}\right|_{S_T} = 0\ ,\ i=0,1,\dots,2m-1\ , \qquad /4/$$

де

$$A(t)u \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) + b(x,t)u\ ,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\ ,\ |\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n\ ,$$

$Q_T = D\times(0,T)$, $D\subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область,

$B = D\setminus\{x\in D: p(x,0)=0\}$, $S_T = \partial D\times(0,T)$.

Позначимо через $H_0^{2m,1}(Q_T)$ замикання множини нескінченно диференційованих функцій, які перетворюються в нуль в околі поверхні $\bar{D}\cup S_T$, за нормою

$$\|u\| = \left(\int_{Q_T}\left(\sum_{|\alpha|\le 2m}(D^\alpha u)^2 + u_t^2\right)dxdt\right)^{1/2}.$$

Функцію $u(x,t)\in H_0^{2m,1}(Q_T)$ будемо називати узагальненим розв"язком задачі /1/–/4/, якщо вона задовольняє рівність

$$\int_{Q_T}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u D^\alpha v - p(x,t)u_t v_t - c(x,t)u v_t +$$

$$+ b(x,t)uv - f(x,t)v\Big)dxdt = 0$$

для довільної $v(x,t)\in H^{2m,1}(Q_T)$ такої, що задовольняє умови /4/ і $v(x,T)=0$.

Зробимо такі припущення стосовно коефіцієнтів і правої частини рівняння /1/. Нехай

1. $p, p_t, c, a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta t}, b\in L^{\infty}(Q_T)$;

2. $p(x,t)\geq\varphi(t)$, $|b(x,t)|\leq\nu_2\varphi'(t)$,

$|p(x,t)|+|p_t(x,t)|+|c(x,t)|\leq\mu_0\varphi'(t), (x,t)\in Q_T$,

де $\varphi(t)$ – неперервно диференційована функція така, що $\varphi(0)=0, \varphi(t), \varphi'(t)$ монотонно зростають, $t\in[0,T]$;

3. $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}, \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=2m}a_{\alpha\beta}(x,t)\eta_\alpha\eta_\beta\geq\nu_0\sum\limits_{|\alpha|=2m}\eta_\alpha^2$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m}a_{\alpha\beta t}(x,t)\eta_\alpha\eta_\beta\leq\nu_1\sum_{|\alpha|=2m}\eta_\alpha^2, (x,t)\in Q_T;$$

4. $f(x,t)\in L^2(Q_T)$, $S_T\in C^{4m}$.

Позначимо через
$$\rho(\tau)=\max\left\{\sup_{Q_\tau}\frac{3p(x,t)\nu_1+p_t(x,t)\nu_0-2c(x,t)\nu_0}{\nu_0\varphi'(t)};0\right\},$$

$$\nu_3=\inf_{[0,T]}\rho(t), \quad \nu_4=\max\{\nu_1;\nu_2\}.$$

Має місце

Теорема 1. Якщо виконуються умови 1–4 та існує $\delta_0>0$ таке, що справедлива нерівність
$$\nu_3+\nu_4\delta_0\leq 1,$$
то задача /1/–/4/ не може мати більш ніж один узагальнений розв"язок.

Твердження теореми одержується з енергетичної оцінки, яка може бути встановлена для узагальненого розв"язку задачі /1/–/4/.

Зробимо додаткове припущення:

5. $|c_t(x,t)|\leq\rho_1(t)\varphi'(t)$, $(x,t)\in Q_T$,

де $\rho_1(t)$ монотонно спадає на $(0,T]$.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. Якщо виконуються умови 1 – 5 і
$$\sup_{[0,T]}\int_D\frac{t^3\rho_1^2(t)f^2(x,t)}{(\varphi(t))^{[\nu_3]+\varkappa+3}}dx<\infty,$$

де $[\nu_3]$ – ціла частина числа ν_3, $\varkappa = \max\{\; + [\nu_5] - [\nu_3]; 0\}$,

$$\nu_5 = \inf_{[0,T]} \max\left\{ \sup_{Q_T} \frac{-p_t(x,t) - 2c(x,t)}{\varphi'(t)}; 0 \right\},$$

то існує узагальнений розв"язок задачі /1/–/4/.

Для її доведення розглядаємо допоміжну задачу

$$(\rho^h(x,t)u_t + c^h(x,t)u)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^\alpha (a^h_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) +$$

$$+ (-1)^m \varepsilon \varphi(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2m} u_t}{\partial x_i^{2m}} + b^h(x,t) u = f(x,t), \qquad /5/$$

$$(x,t) \in D \times (\varepsilon, T) = Q_{\varepsilon,T}, \quad 0 < \varepsilon < T, \quad h > 0,$$

$$u(x,\varepsilon) = 0, \quad u_t(x,\varepsilon) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \bar{n}^i}\right|_{S_{\varepsilon,T}} = 0, \; i = 0, \dots, 2m-1.$$

Тут $\rho^h, c^h, a^h_{\alpha\beta}, b^h$ – усереднення відповідних коефіцієнтів рівняння /1/ по області Q_T. Оскільки рівняння /5/ параболічне за Петровським, то існує розв"язок $u^h_\varepsilon(x,t)$ допоміжної задачі в просторі $H^{4m,2}(Q_{\varepsilon,T})$ [1, с. 118] для довільних $\varepsilon > 0$, $0 < h < \varepsilon$. Залишається одержати оцінку функцій $u^h_\varepsilon(x,t)$ у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$, яка не залежить від h і ε. Після цього, використовуючи слабку компактність множини $\{u^h_\varepsilon(x;t)\}$, доводимо існування узагальненого розв"язку задачі /1/–/4/.

Зауважимо, що еволюційні рівняння, які вироджуються на площині задання початкових даних, розглядалися багатьма авторами [2 – 5].

1. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1965. Т.83. С.3–162. 2. Бубнов Б.А. Смешанная задача для одного класса ультрагиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Применение функционального анализа к уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1983. С.44–47. 3. Бубнов Б.А., Врагов В.Н. К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1982. 264. № 4. С.795–800. 4. Глазатов С.Н. О корректности смешанной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения с произвольным характером вырождения // Сибирский мат. журн. 1987. Т.28. № 2. С.60–66. 5. Барановский Ф.Т. О задаче Коши для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью // Укр. мат. журн. 1984. Т.36. № 3. С.275–282.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.90

П.Я.Пукач

ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Існує досить багато досліджень параболічних рівнянь з виродженням. Відзначимо тут лише праці, які безпосередньо стосуються теми [3, 4, 6, 7].

Нелінійні задачі тісно пов"язані з просторами інтегровних за Бохнером функцій [1, 2]. Ми використовуватимемо методи компактності та монотонності, детально розглянуті праці [5].

Нехай $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – обмежена область. Розглянемо циліндр $Q\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $Q=\Omega\times S$; $S=(0,T)$. У циліндрі Q розглядаємо слабо нелінійне параболічне рівняння виду

$$\varphi(t)u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}-b(x,t)|u|^{p-2}u+ \qquad /1/$$
$$+c(x,t)u=f(x,t),\ p>2.$$

Поставимо змішану задачу для рівняння /1/. Нехай $\Gamma=\partial\Omega\times S$ – бічна поверхня Q. Задамо початкову умову

$$u(x,0)=0. \qquad /2/$$

Крайова умова має вигляд

$$u(x,t)|_\Gamma=0. \qquad /3/$$

Щодо функції $\varphi(t)$ припускаємо таке:
$\varphi(0)=0$, $\varphi(t)$ строго монотонно зростає на S,
$\varphi(t)\in C^\infty(S)$. /4/

Крім того, нехай

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\sigma_i\sigma_j\geq a\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2,\ a>0\ (a_{ij}=a_{ji}) \qquad /5/$$

для м.в. $(x,t)\in Q$ та довільного n – вимірного вектора $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$. Зробимо також припущення

$$\sup_Q|a_{ij_t}|\leq a',\ a'\geq 0,\ i,j=\overline{1,n}; \qquad /6/$$

$$-\infty<b\leq 0; \qquad /7/$$

$$+\infty > b_t \geq -b', \ b' > 0; \qquad /8/$$

$$-\infty < c \leq c_0 \leq 0; \qquad /9/$$

$$0 \leq c' \leq c_t < +\infty. \qquad /10/$$

Теорема 1. Нехай поряд з /4/-/10/ $f\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \in L^2(Q)$. Тоді:

а/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} < +\infty$, то існує розв"язок u задачі /1/-/3/, для якого

$$u \in L^\infty(S;V), \ V = \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \qquad /11/$$

$$\sqrt{\varphi}\, u_t \in L^2(S; L^2(\Omega)) = L^2(Q); \qquad /12/$$

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} = +\infty$, то існує розв"язок u задачі /1/, /3/, для якого виконуються включення /11/, /12/.

Зауваження. Розв"язок рівняння /1/ розуміємо в сенсі простору $D^*(S,V)$ [див.: 8].

Доведення проводимо методом компактності. Будуємо послідовність гальоркінських наближень $u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t)\varphi_k(x)$, де $N \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x) \in V$, а $c_k^N(t)$ шукаємо як розв"язки певної задачі Коші для системи N звичайних диференціальних рівнянь. Далі одержуємо певні апріорні оцінки. Використовуючи ці оцінки і переходячи до границі при $N \to \infty$, робимо висновок про існування розв"язку задачі /1/-/3/ або /1/, /3/ /залежно від того, наскільки суттєво вироджується функція $\varphi(t)$ у початковий момент часу/.

Теорема 2. Якщо виконуються умови /4/, /5/, /7/, /9/ і $\int_0^T \frac{dt}{\varphi'(t)} < +\infty$, то:

а/ при виконанні умови $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} < +\infty$ задача /1/-/3/ має не більше одного розв"язку, що задовольняє включення /11/, /12/;

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} = +\infty$, то задача /1/, /3/ має не більше одного розв"язку, що задовольняє включення /11/, /12/.

Розглянемо в циліндрі Q сильно нелінійне параболічне рівняння вигляду

$$\varphi(t)u_t + Au = f(x,t). \qquad /13/$$

Припущення щодо $\varphi(t)$ такі ж /див. /4//. Щодо оператора A припускаємо

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega_0(x,|\nabla u|^{p-1})|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \omega_1(x)|u|^{p-2}u,\ p>2 \qquad /14/$$

Нехай:

а/ при кожному $s\in[0,T]$ функція $x\to\omega_0(x,s)$ вимірна; /15/

б/ для м.в. $x\in\Omega$ функція $s\to\omega_0(x,s)$ неперервна. /16/

Крім того,

$\omega_i \leqslant M = const$ для всіх $s\in[0,T]$ та м.в. $x\in\Omega$

$(i=0,1)$. /17/

Припускаємо також, що

$\forall x\in\Omega\ \forall s,t\in[0,T]$ функція $t\to\omega_0(x,t)t$ зростає, тобто

$$\omega_0(x,t)t-\omega_0(x,s)s\geqslant 0,\ t\geqslant s. \qquad /18/$$

Нехай для ω_i справедлива оцінка

$$\omega_i \geqslant m > 0 \quad (i=0,1). \qquad /19/$$

З /14/-/19/ випливає [див.: 1], що A - хемінеперервний, монотонний, коерцитивний оператор.

Теорема 3. Нехай поряд з /4/, /14/-/19/ виконується умова

$\int\limits_0^T \frac{\|f\|_{V^*}^q}{[\varphi(t)]^{1+\delta}}dt < +\infty,\ \delta = const > 0,\ V = W_0^{1,p}(\Omega)$. Тоді:

а/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{[\varphi(t)]^p} < +\infty$, то існує єдиний розв"язок задачі /13/, /2/, /3/, для якого:

$$u\in L^\infty(S;L^2(\Omega))\cap L^p(S;V), \qquad /20/$$

$$\varphi(t)u_t\in L^q(S;V^*),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1; \qquad /21/$$

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{[\varphi(t)]^p} = +\infty$, то існує єдиний розв"язок задачі /13/, /3/, для якого мають місце включення /20/, /21/.

Доведення проводиться методом Гальоркіна з використанням властивостей оператора A.

Розглянемо далі довільну обмежену нециліндричну область $Q\subset \mathbb{R}^{n+1}$. Позначимо $\Omega_\tau = Q\cap\{t=\tau\}$. Припускаємо, що бічна поверхня Γ області Q така, що допускає продовження через неї коефіцієнтів рівнянь /1/, /13/ зі збереженням диференціальних властивостей цих коефіцієнтів. Крім того, нехай $\Gamma\in C^1$, довільний перетин $(n+1)$ - вимірної поверхні Γ площиною $t=\tau$ є многовид розмірності n.

Мають місце такі теореми.

Теорема 4. Нехай область Q така, що $\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2}$, $t_1 < t_2$; Γ задовольняє вищевказані умови, і виконуються всі умови теореми 1. Тоді:

а/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} < +\infty$, то існує розв"язок задачі /I/-/3/ в Q, для якого:

$$u \in L^\infty(S; V_t),\ V_t = \overset{0}{H}{}^1(\Omega_t) \cap L^p(\Omega_t), \qquad /22/$$

$$\sqrt{\varphi}\, u_t \in L^2(S; L^2(\Omega_t)) = L^2(Q); \qquad /23/$$

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} = +\infty$, то існує розв"язок задачі /I/, /3/, в Q, для якого мають місце включення /22/, /23/.

Теорема 5. Якщо в Q виконуються всі умови теореми 2, то:
а/ при виконанні умови $\int_0^T \frac{dt}{\varphi'(t)} < +\infty$ задача /I/-/3/ має не більше одного розв"язку, який задовольняє включення /22/, /23/;
б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi'(t)} = +\infty$, то задача /1/, /3/ має не більше одного розв"язку, який задовольняє включення /22/, /23/.

Теорема 6. Нехай у Q виконуються всі умови теореми 3; Γ - така поверхня, як описано вище. Тоді:

а/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{[\varphi(t)]^p} < +\infty$, то існує єдиний розв"язок задачі /I3/, /2/, /3/, для якого:

$$u \in L^\infty(S; L^2(\Omega_t)) \cap L^p(S; V_t),\ V_t = W_0^{1,p}(\Omega_t), \qquad /24/$$

$$\varphi u_t \in L^q(S; V_t^*),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \qquad /25/$$

б/ якщо $\int_0^T \frac{dt}{[\varphi(t)]^p} = +\infty$, то задача /I3/, /3/ має єдиний розв"язок, який задовольняє включення /24/, /25/.

Доведення теорем 4 - 6 базується на методі регуляризації, запропонованому Ж.-Л.Ліонсом у праці [5].

1. Г а е в с к и й Х., Г р е г е р К., З а х а р и а с К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978. 2. И о с и д а К. Функциональный анализ. М., 1967. 3. К а л а ш н и к о в А.С. Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка I // Вестн. МГУ. Сер. мат., механ. 1971. № 2. С.29-35. 4. К а л а ш н и к о в А.С. Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка II // Вестн. МГУ. Сер. мат., механ. 1971. № 3. С.3-9.
2-2139

5. Л ж о н с Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1978. 6. М ы с о в с к и х П.И. Об обобщенных решениях некоторых вырождающихся уравнений параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1990. Т.26. № 3. С.468-478. 7. Carmela Vitanza. Sulla derivata frazionaria di ordine per le soluzioni dei sistemi parabolici degeneri di ordine superiore // Bol. Unione mat. ital.1986.T.B5.№4.P.197-208. 8. Schwartz L. Distributions a valeurs vectorielles. I, II // Ann. Inst. Fourier. 7(1957). P.1-141; 8(1958). P.1-209.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.90

УДК 517.946+511.2

І.О. Бобик

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь є взагалі некоректними, а у випадках коректності задачі її коректність нестійка стосовно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області. Крайові задачі з даними на всій границі /задачі типу Діріхле/ для деяких класів диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами розглядалися багатьма дослідниками [1 - 3]. Дана стаття розвиває та доповнює результати вказаних праць для випадку рівняння другого порядку, яке містить змішану похідну.

Надалі використаємо такі позначення:
Ω - одиничне коло, $D=\{(t,x): t\in[0,T], x\in\Omega\}$,
$H_q(\Omega)(q\in\mathbb{Z})$ - гільбертів простір 2π - періодичних комплекснозначних функцій $v(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{ikx}$ зі скалярним добутком

$$(v,w)_{H_q(\Omega)} = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[1+|k|^2]^q v_k\bar{w}_k ,$$

що індукує норму:

$$\|v(x)\|^2_{H_q(\Omega)} = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[1+|k|^2]^q|v_k|^2;$$

$H^n_q(D)$ $(q\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}_+)$ - гільбертів простір функцій $u(t,x)$ таких, що функція $\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}$ $(r=\overline{0,n})$ для кожного $t\in[0,T]$ належить простору $H_{q-r}(\Omega)$ і неперервна по t в нормі $H_{q-r}(\Omega)$; норма в просторі $H_q^n(D)$ задається формулою

$$\|u(t,x)\|^2_{H_q^n(D)} = \int_0^T \sum_{r=0}^{n} \left\| \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r} \right\|_{H_{q-r}(\Omega)} dt.$$

2. В області D для рівняння

$$L[u] \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad /1/$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ розглянемо задачу з умовами

$$\begin{cases} l_1[u] \equiv u(0,x) + q_0 u_t(0,x) = \varphi(x), \\ l_2[u] \equiv u(T,x) + q_1 u_t(T,x) = \psi(x), \end{cases} \qquad /2/$$

де q_0, q_1 - дійсні числа, такі, що

$$q_1 - q_0 + T \neq 0. \qquad /3/$$

Припустимо, що оператор L - строго гіперболічний, тобто корені μ_1, μ_2 рівняння

$$a\mu^2 + b\mu + c = 0 \qquad /4/$$

дійсні та різні.

Вигляд області D накладає умови 2π - періодичності по x на функції $\varphi(x), \psi(x)$ та $u(t,x)$. Нехай

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}, \quad \psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{ikx}, \qquad /5/$$

де $\varphi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-ikx} dx$, $\psi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x) e^{-ikx} dx$.

Розв"язок задачі /1/-/3/ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{ikx}. \qquad /6/$$

Підставляючи ряди /5/, /6/ у рівняння /1/ та умови /2/, бачимо, що для визначення кожної із функцій $u_k(t)$ отримаємо таку крайову задачу для звичайного диференціального рівняння:

$$a\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + b(ik)\frac{du_k(t)}{dt} + c(ik)^2 u_k(t) = 0; \qquad /7/$$

$$\begin{cases} U_1[u_k(t)] \equiv u_k(0) + q_0 u_k'(0) = \varphi_k, \\ U_2[u_k(t)] \equiv u_k(T) + q_1 u_k'(T) = \psi_k. \end{cases} \qquad /8/$$

3. Для кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ розв"язок задачі /7/, /8/ має вигляд

$$u_k(t) = C_k^{(1)} e^{ik\mu_1 t} + C_k^{(2)} e^{ik\mu_2 t} \qquad /9/$$

де коефіцієнти $C_k^{(1)}, C_k^{(2)}$ визначаються зі системи рівнянь

$$\begin{cases} C_k^{(1)} U_1[e^{ik\mu_1 t}] + C_k^{(2)} U_1[e^{ik\mu_2 t}] = \varphi_k, \\ C_k^{(1)} U_2[e^{ik\mu_1 t}] + C_k^{(2)} U_2[e^{ik\mu_2 t}] = \psi_k. \end{cases} \qquad /10/$$

Тому задача /7/, /8/ є однозначно розв"язною тоді і тільки тоді, коли $\Delta(k) \equiv \det \| U_p(e^{ik\mu_j t}) \|_{p,j=1,2} \neq 0$. Проводячи обчислення, знаходимо, що

$$\Delta(k) = e^{ik\mu_1 T}\{[(q_0 q_1 \mu_1 \mu_2 k^2 - 1)(1 - \cos(\mu_2 - \mu_1)kT) - (q_0\mu_1 + q_1\mu_2)k \cdot \sin(\mu_2 - \mu_1)kT] +$$
$$+ [(q_0\mu_1 + q_1\mu_2)k \cdot \cos(\mu_2 - \mu_1)kT - (q_0 q_1 \mu_1 \mu_2 k^2 - 1)\sin(\mu_2 - \mu_1)kT - (q_0\mu_2 + q_1\mu_1)k]i\}. \qquad /11/$$

Зауваження 1. Враховуючи умову /3/, легко показати, що при $k = 0$ завжди існує єдиний розв"язок $u_0(t) \in C^2([0,T])$ задачі /7/, /8/, який є многочленом першого степеня.

Теорема 1. Для єдиності розв"язку задачі /1/, /2/, /3/ в просторі $H_2^2(D)$ необхідно і достатньо, щоб для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ виконувалася хоча б одна з умов

$$(q_0 q_1 \mu_1 \mu_2 k^2 - 1)(1 - \cos(\mu_2 - \mu_1)kT) - (q_0\mu_1 + q_1\mu_2)k \sin(\mu_2 - \mu_1)kT \neq 0,$$
$$(q_0\mu_1 + q_1\mu_2)k \cdot \cos(\mu_2 - \mu_1)kT - (q_0 q_1 \mu_1 \mu_2 k^2 - 1)\sin(\mu_2 - \mu_1)kT - (q_0\mu_2 + q_1\mu_1)k \neq 0.$$

Доведення випливає з формули /11/ та з теореми про єдиність розвинення періодичної функції в ряд Фур"є.

Твердження 1. Для єдиності розв"язку задачі /1/, /2/, /3/ в просторі $H_2^2(D)$ достатньо, щоб $|q_0| \neq |q_1|$ і $\mu_1 \neq -\mu_2$.

Доведення. Представимо характеристичний визначник $\Delta(k)$ у вигляді

$$\Delta(k) = (1 + q_0\mu_1 ki)(1 + q_1\mu_2 ki)e^{ik\mu_2 T} - (1 - q_0\mu_2 ki)(1 + q_1\mu_1 ki)e^{ik\mu_1 T}. \qquad /11'/$$

При $|q_0| \neq |q_1|$ і $\mu_1 \neq -\mu_2$ модулі чисел $(1 + q_0\mu_1 ki)(1 + q_1\mu_2 ki)e^{ik\mu_2 T}$ та $(1 + q_0\mu_2 ki)(1 + q_1\mu_1 ki)e^{ik\mu_1 T}$ не рівні, а тому $\Delta(k) \neq 0$ $(\pm k = 1, 2, \dots)$.

Твердження 2. Якщо $q_0 = q_1$, то для єдиності розв"язку задачі /1/-/3/ необхідно і достатньо, щоб число $\frac{(\mu_1 - \mu_2)T}{2\pi}$ було ірраціональним.

Доведення випливає з того, що при $q_0 = q_1$

$$\Delta(k) = (1 + q_0\mu_1 ki)(1 + q_0\mu_2 ki)(e^{ik\mu_2 T} - e^{ik\mu_1 T}).$$

4. Розглянемо існування розв"язку задачі /1/–/3/ в припущенні, що $\Delta(k)\neq 0$ $(k\in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$. На основі формул /6/, /9/, /10/ розв"язок розглядуваної задачі формально представляється у вигляді ряду

$$u(t,x)=u_0(t)+\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{\Delta_{21}(k)e^{ik\mu_2 t}+\Delta_{22}(k)e^{ik\mu_1 t}}{\Delta(k)}\varphi_k+\frac{\Delta_{11}(k)e^{ik\mu_2 t}+\Delta_{12}(k)e^{ik\mu_1 t}}{\Delta(k)}\psi_k\right]e^{ikx}, \qquad /12/$$

де $\Delta_{pj}(k)=(-1)^{p+j}U_p[e^{ik\mu_j t}]$ $(p,j=1,2)$.

Теорема 2. Нехай існують константи $M_1, M_2>0$ і $s_1, s_2\in \mathbb{R}$ такі, що для всіх /крім скінченного числа/ цілих $k\neq 0$ виконуються нерівності

$$\left|\frac{\Delta_{pj}(k)}{\Delta(k)}\right|\leq M_p|k|^{s_p} \qquad (p,j=1,2) \qquad /13/$$

і нехай $\varphi(x)\in H_{q+s_2}(\Omega)$, $\psi(x)\in H_{q+s_1}(\Omega)$. Тоді існує розв"язок задачі /1/–/3/, який представляється рядом /13/ і належить простору $H_q^2(D)$. Цей розв"язок неперервно залежить від функцій $\varphi(x), \psi(x)$.

Доведення. З формули /12/ та нерівностей /13/ отримуємо оцінку

$$\|u(t,x)\|^2_{H_q^2(D)}\leq C_1\left(\|\varphi(x)\|^2_{H_{q+s_2}(\Omega)}+\|\psi(x)\|^2_{H_{q+s_1}(\Omega)}\right), \qquad /14/$$

де $C_1=C_1(\mu_1,\mu_2,T,q_0,q_1,M_1,M_2)$. З нерівності /14/ випливає доведення теореми.

Відзначимо, що при $q\geq 3$ знайдений розв"язок згідно з теоремою Соболева про вкладення просторів є класичним.

Виясни́мо, в яких випадках виконуються оцінки /13/.

Твердження 3. Якщо $|q_0|\neq|q_1|$ і $\mu_1\neq-\mu_2$, то нерівності /13/ виконуються для всіх $k\in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ при

1/ $s_1=1$, $s_2=1$, якщо $q_0\neq 0$, $q_1\neq 0$;
2/ $s_1=-1$, $s_2=0$, якщо $q_0=0$, $q_1\neq 0$;
3/ $s_1=0$, $s_2=-1$, якщо $q_0\neq 0$, $q_1=0$.

Доведення. З формули /11'/ при $|q_0|\neq|q_1|$ і $\mu_1\neq-\mu_2$ приходимо до наступної оцінки:

$$|\Delta(k)|\geq\frac{|\mu_1^2-\mu_2^2||q_0^2-q_1^2|\cdot|k|^2}{\sqrt{1+q_0^2\mu_1^2k^2}\sqrt{1+q_1^2\mu_2^2k^2}+\sqrt{1+q_0^2\mu_2^2k^2}\sqrt{1+q_1^2\mu_1^2k^2}}\geq\begin{cases}D_1, & q_0q_1\neq 0,\\ D_2|k|, & q_0q_1=0.\end{cases} \qquad /15/$$

Крім того,

$$|\Delta_{1j}(k)|\leq\begin{cases}G_j^{(1)}|k|, & \text{при } q_0\neq 0,\\ 1, & \text{при } q_0=0,\end{cases}\qquad |\Delta_{2j}(k)|\leq\begin{cases}G_j^{(2)}|k|, & \text{при } q_1\neq 0,\\ 1, & \text{при } q_1=0,\end{cases} \qquad /16/$$

де $D_1, D_2, G_j^{(1)}, G_j^{(2)}$ – додатні константи, не залежні від k.

З нерівностей /15/, /16/ випливає доведення теореми.

Якщо нуль є коренем рівняння /4/ $(C=0)$, то у випадку 1/ оцінки /13/ виконуються при $S_1=S_2=0$.

<u>Твердження 4.</u> Якщо $|q_0|=|q_1|$, то для майже всіх /у сенсі міри Лебега/ чисел $\alpha=\pi/T$ нерівності /13/ виконуються для всіх $k\in\mathbb{Z}(|k|>N(\alpha))$ при

1/ $S_i=1+\varepsilon(0<\varepsilon<1;i=1,2)$ якщо $|q_0|=|q_1|\neq 0$ і $C\neq 0$,

2/ $S_i=2+\varepsilon(0<\varepsilon<1;i=1,2)$, якщо $|q_0|=|q_1|=0$ або $C=0$.

<u>Доведення.</u> Розглянемо випадок 1/. Позначимо

$$\xi_k=\operatorname{arctg}\frac{(q_0\mu_1+q_1\mu_2)k}{1-q_0q_1\mu_1\mu_2k^2},$$

тоді, спираючись на нерівність $\sin x\geqslant\frac{2x}{\pi}\left(x\in[0;\frac{\pi}{2}]\right)$, з /11/ отримуємо:

$$|\Delta(k)|\geqslant 2|1-q_0q_1\mu_1\mu_2k^2||\sin\frac{(\mu_2-\mu_1)kT}{2}||\cos\xi_k\sin\frac{(\mu_2-\mu_1)kT}{2}+\sin\xi_k\cos\frac{(\mu_2-\mu_1)kT}{2}|\geqslant$$

$$\geqslant 2|1-q_0q_1\mu_1\mu_2k^2||\sin\left(\frac{(\mu_2-\mu_1)kT}{2}-n_k\pi\right)||\sin\left(\frac{(\mu_2-\mu_1)kT}{2}+\xi_k-m_k\pi\right)|\geqslant$$

$$\geqslant 8\frac{T}{\pi}|1-q_0q_1\mu_1\mu_2k^2||k\frac{(\mu_2-\mu_1)T}{2\pi}-n_k||\frac{(\mu_2-\mu_1)}{2}+\frac{\xi_k}{T}-\frac{\pi}{T}\frac{m_k}{k}|, \qquad /17/$$

де n_k, m_k – цілі числа такі, що $|k\frac{(\mu_2-\mu_1)T}{2\pi}-n_k|\leqslant\frac{1}{2}$, $|\frac{(\mu_2-\mu_1)kT}{2\pi}+\frac{\xi_k}{\pi}-m_k|\leqslant\frac{1}{2}$.

З нерівності /17/, теореми 2.1. і леми 2.4. праці [1, гл. 1] випливає, що для майже для /за Лебегом/ чисел $\alpha=\pi/T$ і всіх $k\in\mathbb{Z}$ таких, що $|k|>N(\alpha)$, виконуються нерівності

$$|\Delta(k)|\geqslant\begin{cases}B_1|k|^{-\varepsilon}, & q_0q_1\mu_1\mu_2\neq 0\\ B_2|k|^{-2-\varepsilon}, & q_0q_1\mu_1\mu_2=0\end{cases}\quad(0<\varepsilon<1;\ B_1,B_2>0). \qquad /18/$$

З оцінок /16/, /18/ випливає доведення твердження для випадку 1/. Для випадку 2/ доведення проводиться аналогічно.

<u>Твердження 5.</u> Якщо $\mu_1=-\mu_2$, то для майже всіх /в сенсі міри Лебега/ чисел $\alpha=\pi/T$ при

1/ $S_i=1+\varepsilon\ (i=1,2)$, якщо $q_0\neq 0$ і $q_1\neq 0$;

2/ $S_1=1+\varepsilon$; $S_2=2+\varepsilon$, якщо $q_0=0$ і $q_1\neq 0$ $(0<\varepsilon<1)$,

3/ $S_1=2+\varepsilon$; $S_2=1+\varepsilon$, якщо $q_0\neq 0$ і $q_1=0$.

Доведення проводиться аналогічно доведенню твердження 4.

<u>Зауваження 2.</u> Якщо $\mu_1=-\mu_2$ і $q_0=q_1=0$, то отримаємо задачу Діріхле для рівняння коливань струни, яку розглядали Буржин і Даффін [3].

1. П т а ш н и к Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 2. Ф и г о л ь В.В. Краевые задачи с данными на всей границе для дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического и составного типов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Донецк, 1985. 3. Bourgin D.G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. Vol.45. N12. P. 851-858.

Стаття надійшла до редколегії 26.0?.90

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

У прямокутнику $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T\}$ розглянемо рівняння

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)u = f(x,t) \qquad /1/$$

з початковими

$$u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \quad (0\leq x\leq l) \qquad /2/$$

і граничними умовами

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \quad (0\leq t\leq T), \qquad /3/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t), f(x,t)$ – достатньо гладкі в D функції;
2/ $a(x,t)>0$ в D;
3/ $f(0,0)=f(l,0)=0$.

Добре відомо, що за цих припущень існує єдиний класичний розв"язок цієї задачі.

Користуючись методом примежового шару [1], одержуємо асимптотику розв"язку задачі /1/-/3/ до деякого порядку N, яку шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /4/$$

де $\tau = {}^t/_\varepsilon$.

Функції регулярної частини асимптотики визначаються як розв"язки задач:

$$-\frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial x^2}+a(x,t)\bar{u}_i=f_i(x,t); \qquad /5/$$

$$\bar{u}_i(0,t)=0,\ \bar{u}_i(l,t)=0, \qquad /6/$$

$$f_0(x,t)\equiv f(x,t),\ f_i(x,t)=-\frac{\partial\bar{u}_{i-1}}{\partial t}-\frac{\partial^2\bar{u}_{i-2}}{\partial t^2}\ (i=1,\dots,N),$$

де тут і далі вважається, що функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулеві.

Як бачимо, $\bar{u}_i(x,t)\,(i=0,\dots,N)$ визначаються рекурентно, як розв"язки граничних задач /5/, /6/ для звичайних диференціальних рівнянь / t - параметр/. Існування та єдиність розв"язку цих задач при наших припущеннях випливає з праці [3].

Функції типу примежового шару $\Pi_i(x,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ є розв"язками задач

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}+a(x,0)\Pi_i=\varphi_i(x,\tau); \qquad /7/$$

$$\Pi_i(0,\tau)=0,\ \Pi_i(l,\tau)=0; \qquad /8/$$

$$\Pi_i(x,0)=-\bar{u}_i(x,0),\ \frac{\partial\Pi_i(x,0)}{\partial\tau}=-\frac{\partial\bar{u}_{i-1}(x,0)}{\partial t}, \qquad /9/$$

де $\varphi_0(x,\tau)\equiv 0,\ \varphi_i(x,\tau)$ легко виписуються явним чином і залежать від $\Pi_j(x,\tau)\,(j<i)$.

Отже, $\Pi_i(x,\tau)\,(i=0,\dots,N)$ знаходяться рекурентно як розв"язки змішаних задач для гіперболічних рівнянь /7/-/9/. Легко безпосередньо перевірити виконання умов узгодженості до другого порядку в кутових точках /0,0/ і /l,0 / області D /використовується умова 3/ і, отже, існує єдиний класичний розв"язок цих задач.

Застосовуючи міркування, аналогічні наведеним у праці [5], доводимо оцінку

$$|\Pi_i(x,\tau)|\leqslant const\ e^{-\beta\tau}\ (i=0,\dots,N),$$

де константа $\beta > 0$. Звідси випливає, що функції $\Pi_i(x,\tau)(i=0,\dots,N)$ є функції типу примежового шару.

Застосовуючи метод інтегралів енергії [2], одержуємо

$$\| R_N \|_{L_2(D)} \le C\varepsilon^{N+1/2}, \qquad /10/$$

де константа C не залежить від ε.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Припустимо, що в області D виконуються умови /1/-/3/. Тоді розв"язок задачі /1/-/3/ допускає асимптотичне зображення /4/, де $\bar{u}_i(x,t)(i=0,\dots,N)$ - розв"язки двоточкових задач /5/, /6/; функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)(i=0,\dots,N)$ - розв"язки задач /7/-/9/; залишковий член допускає оцінку /10/.

Зауваження. Результат роботи анонсовано у праці [4].

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122. 2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 4. Цымбал В.Н. Некоторые сингулярно возмущенные задачи для гиперболических уравнений // Успехи мат. наук. 1982. Т.37. № 4. С.102. 5. Muszyński I. Badania jakościowe rozwiązań niektórych równań typu hiperbolicznego // Zeszyty Naukowe Politech. Matematyka. 1967. T.13. S.1-68.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.90

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Асимптотику розв"язку задачі Коші для гіперболічного рівняння порядку $m+1$ /$m \geq 1$/, що вироджується у гіперболічне рівняння порядку m, одержав М.Г.Джавадов [3]. Аналогічна задача Коші для гіперболічного рівняння порядку $m+2$, що вироджується у гіперболічне рівняння порядку m, розглянута нами у статті [6], а також С.М.Маряняном у праці [4]. У вказаних вище працях початкові дані не залежали від малого параметру; разом з тим у цьому випадку при деяких припущеннях, як свідчать, наприклад, результати [5, 7], асимптотика має деякі характерні риси. Побудові асимптотики розв"язків задачі Коші у вказаній ситуації і присвячена ця стаття.

Визначимо область $\Omega=\{(x_1,\dots,x_n)=(x_1,x'): 0\leq x_1\leq T, -\infty<x_i<+\infty\}$. Введемо лінійні x_1, строго гіперболічні оператори порядків m, $m+1$, $m+2$ [2]:

$$L_m\equiv\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)D^\alpha,\ L_{m+1}\equiv\sum_{|\beta|\leq m+1}b_\beta(x)D^\beta,\ L_{m+2}\equiv\sum_{|\gamma|\leq m-1}c_\gamma(x)D^\gamma,$$

де $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\dots D_n^{\alpha_n}$, $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=\overline{1,n})$.

Надалі будемо вважати виконаними такі умови:

1/ усі функції /коефіцієнти рівнянь, праві частини і початкові умови/ достатньо гладкі, порядок гладкості, очевидно, залежить від порядку асимптотики N, що будується нижче;

2/ коефіцієнти при старших похідних по x_1 операторів L_m, L_{m+1}, L_{m+2} додатні;

3/ оператор L_{m+1} розділяє оператор L_{m+2} [2], а оператор L_m розділяє оператор L_{m+1}.

1. В області Ω розглядається задача Коші

$$\varepsilon L_{m+1}u+L_m u=f(x),\qquad /1/$$

$$u\Big|_{x_1=0}=g_0(x'),\dots,\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x_1^{m-1}}\Big|_{x_1=0}=g_{m-1}(x'),\ \varepsilon\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\Big|_{x_1=0}=g_m(x'),\qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Асимптотика будується методом примежового шару [1] у вигляді

$$u(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i u_i(x)+\varepsilon^{m-1}\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^i\Pi_i(\tau,x')+R_{N+1}(x,\varepsilon),\qquad /3/$$

де $\tau=x_1/\varepsilon$; перша сума в /3/ – регулярна частина асимптотики, $\Pi_i(\tau,x')$ $(i=0,\dots,N+1)$ – функції примежового шару, $R_{N+1}(x,\varepsilon)$ – залишковий член.

Задачі для визначення функцій регулярної частини асимптотики і функцій примежового шару одержують стандартним чином. Функції регулярної частини асимптотики є розв"язками задач Коші для гіперболічних рівнянь, функції примежового шару є розв"язками задач для звичайних диференціальних рівнянь / x' – параметр/. Функції одержують рекурентно в такій послідовності: Π_0, u_0, Π_1... і т.д. Це, як бачимо, є відмінністю порівняно з аналогічною задачею без параметра в граничних умовах. Як наслідок цього, вироджена задача – це задача Коші для рівняння /1/, якщо в ньому прийняти $\varepsilon = 0$, з початковими умовами, що відрізняються від перших m умов /2/.

Залишковий член має оцінку, аналогічну оцінці залишкового члена праці [3].

2. В області Ω розглядається задача Коші

$$\varepsilon^2 L_{m+2}u + \varepsilon L_{m+1}u + L_m u = f(x); \qquad /4/$$

$$u\Big|_{x_1=0} = g_0(x'), \ldots, \frac{\partial^{m-1}u}{\partial x_1^{m-1}}\Big|_{x_1=0} = g_{m-1}(x'),\ \varepsilon\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\Big|_{x_1=0} = g_m(x'),\ \varepsilon^2\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = g_{m+1}(x'). \qquad /5/$$

Асимптотика має вигляд

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i(x) + \varepsilon^{m-1}\sum_{i=0}^{N+2}\varepsilon^i \Pi_i(\tau, x') + R_{N+1}(x,\varepsilon), \qquad /6/$$

де, як і раніше, $v_i(x)$ – функції регулярної частини асимптотики, $\Pi_i(\tau, x')$ – функції примежового шару в околі $x_1 = 0$, $R_{N+1}(x,\varepsilon)$ – залишковий член.

Стандартне застосування методу примежового шару дає змогу виписати задачі для знаходження функцій регулярної частини асимптотики і функцій примежового шару. Що стосується відмінності /6/ від асимптотики відповідної задачі без малого параметру в початкових умовах [6, 4], то тут слід повторити те, що було сказано вище стосовно асимптотики /3/.

Залишковий член $R_{N+1}(x,\varepsilon)$ має оцінку, аналогічну оцінці праць [6, 4].

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3–122. 2. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961. 3. Джавадов М.Г. Задача Коши для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных // Изв. Ан АзССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1963. № 6. С.3–9. 4. Марнян С.М. Асимптотика решения задачи Коши для гиперболического уравнения, полиномиально зависящего от малого параметра. Баку, 1984. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2161–84 Деп. 5. 5. Флюд В.М., Цымбал В.Н. Сингулярно возмущенная задача

Коши с большой начальной скоростью для гиперболических систем // Методы малого параметра: Тез. докл. Всесоюз. науч. совещ. Нальчик, 1987. С.150. 6. Ц ы м б а л В.Н. Некоторые сингулярно возмущенные задачи для гиперболических уравнений // Успехи мат. наук. 1982. Т.37. № 4. С.102. 7. Ц ы м б а л В.Н. Задача сингулярно возмущенных уравнений математической физики с малым параметром в граничном условии // Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики: IX советско-чехословацкое совещ. Донецк, 1986. С.139.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.90

УДК 517.956

Г.М.Закопець

УЗАГАЛЬНЕНІ ЗАДАЧІ РІК"Є ТА НЕЙМАНА ДЛЯ ІТЕРОВАНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Розглядаємо задачі Рік"є та Неймана для ітерованого рівняння Гельмгольца в октанті $\mathbb{R}^3_+$, коли задані граничні значення є узагальненими функціями. У класичній постановці задача Рік"є вивчалась у праці [3], а задача Неймана - у праці [4].

Нехай [1, 2] $D(\mathbb{R}^3)$ - простір фінітних нескінченно-диференційованих функцій в $\mathbb{R}^3$; $S(\mathbb{R}^3)$ - простір функцій класу C^∞, які при $|x|\to\infty$ спадають разом зі своїми похідними швидше від довільного степеня $|x|^{-1}$; $D'(\Gamma_i)$ і $S'(\Gamma_i)$ - простори лінійних неперервних функціоналів на $D(\Gamma_i)$ і $S(\Gamma_i)$ відповідно, де

$$\Gamma_i=\left\{X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ x_i=0,\ x_m\geq 0\ m\neq i,\ m,i=\overline{1,3}\right\}.$$

Дію узагальненої функції $F\in D'(\Gamma_i)$ на основну $\varphi\in D(\Gamma_i)$ позначимо $<F,\varphi>$.

Постановка узагальненої задачі Рік"є.

Нехай $F_i, G_i\in D'(\Gamma_i)$, $i=\overline{1,3}$. Знайти розв"язок рівняння

$$(\Delta-c^2)^2 u(x)=0 \qquad /1/$$

в $\mathbb{R}^3_+=\left\{X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: x_i>0,\ i=\overline{1,3}\right\}$, який задовольняє умови:

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} u(X)\varphi(X)dX^i=<F_i(X^i),\varphi(X^i)> \qquad /2/$$

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta u(X) \varphi(X)\, dX^i = < G_i(X^i), \varphi(X^i) >$$
$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3), \ i = \overline{1,3}, \qquad /3/$$

де c – додатна константа; Δ – оператор Лапласа; $X^i = X|_{x_i=0}$.

У праці [3] побудована функція Гріна $G(X,Y)$ класичної задачі Рік"е для рівняння /1/, яка має такий вигляд:

$$G(X,Y) = \sum_{j=1}^{8} (-1)^{j+1} e^{-cr_j}, \qquad /4/$$

де $r_j = |X_j Y| = [\sum_{i=1}^{3} (y_i - x_{ji})^2]^{1/2}, \quad j = \overline{1,8}$;

$Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3_+$, $X = X_1 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$, $X_2 = (-x_1, x_2, x_3)$,
$X_3 = (-x_1, -x_2, x_3)$, $X_4 = (x_1, -x_2, x_3)$, $X_5 = (x_1, -x_2, -x_3)$,
$X_6 = (-x_1, -x_2, -x_3)$, $X_7 = (-x_1, x_2, -x_3)$, $X_8 = (x_1, x_2, -x_3)$.

Легко переконатися, що

$$D_{y_i} G(X,Y)|_{y_i=0} = 2cx_i \sum_{j=1}^{4} (-1)^{j+1} e^{-cR_{ki}} \cdot R_{ki}^{-1}; \qquad /5/$$

$$D_{y_i} \Delta G(X,Y)|_{y_i=0} = 2cx_i \sum_{j=1}^{4} (-1)^{j+1} e^{-cR_{ki}} \left[\frac{c^2}{R_{ki}} - \frac{2c}{R_{ki}^2} - \frac{2}{R_{ki}^3}\right], \qquad /6/$$

де $R_{ji} = r_j$ для $y_i = 0$, $j = \overline{1,8}$, $i = \overline{1,3}$,
$k = 2j - 1$ для $i = 1$, $k = j + 2$ для $i = 2$, $k = j$ для $i = 3$.

Справедлива така лема.

<u>Лема 1.</u> Нехай

$$p_i(X, Y^i) = A[2c^2 D_{y_i} G(X,Y) - D_{y_i} \Delta_y G(X,Y)]|_{y_i=0}$$
$$q_i(X, Y^i) = A D_{y_i} G(X,Y)|_{y_i=0}, \quad A = (8\pi c)^{-1}, \ i = \overline{1,3}. \qquad /7/$$

Тоді

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} p_m(X, Y^m) \varphi(X)\, dX^i = \begin{cases} \varphi(Y^i), & m = i \\ 0, & m \neq i \end{cases}; \qquad /8/$$

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} q_m(X, Y^m) \varphi(X)\, dX^i = 0; \qquad /9/$$

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta p_m(X, Y^m) \varphi(X)\, dX^i = 0; \qquad /10/$$

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta\, q_m(X, Y^m)\, \varphi(X)\, dX^i = \begin{cases} \varphi(Y^i), & m = i \\ 0, & m \neq i, \end{cases} \qquad /11/$$

$$\forall \varphi(X) \in D(\mathbb{R}^3), \quad i = \overline{1,3}.$$

При доведенні леми використані властивості функції Гріна /4/ та її похідних [3].

<u>Теорема 1.</u> Нехай $F_i, G_i \in S'(\Gamma_i)$, $i = \overline{1,3}$. Тоді функція $u(X) = \sum_{i=1}^{3} [u_i(X) + \bar{u}_i(X)]$, $X \in \mathbb{R}^3_+$,

$$/12/$$

де $u_i(X) = \langle F_i(Y^i), p_i(X, Y^i) \rangle$

$$\bar{u}_i(X) = \langle G_i(Y^i), q_i(X, Y^i) \rangle, \quad i = \overline{1,3} \qquad /13/$$

є розв"язком задачі /1/-/3/ і $u(X) \to 0$ при $|X| \to +\infty$.

<u>Доведення.</u> Оскільки $(\Delta_X - c^2)^2 G(X, Y) = 0$, $X \in \mathbb{R}^3_+$, то $(\Delta_X - c^2)^2 u_i(X) = \langle F_i(Y^i), (\Delta_X - c^2)^2 p_i(X, Y^i) \rangle =$

$$= \langle F_i(Y^i), A\,[2c^2 D_{y_i}((\Delta_X - c^2)^2 G(X, Y)) -$$

$$- D_{y_i} \Delta_Y ((\Delta_X - c^2)^2 G(X, Y))]\big|_{y_i = 0} \rangle = 0.$$

Аналогічно $(\Delta_X - c^2)^2 \bar{u}_i(X) = 0$, тому $(\Delta_X - c^2)^2 u(X) = 0$, тобто функція $u(X)$, визначена формулою /12/-/13/, є розв"язком рівняння /1/.

Виконання умов /2/, /3/ перевіримо, використовуючи неперервність функціоналів F_i, G_i, $i = \overline{1,3}$, аналог теореми Фубіні та формули /9/ і /10/ леми 1

$$\lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} u(X)\varphi(X)\, dX^i = \lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \Big[\sum_{m=1}^{3} (u_m(X) + \bar{u}_m(X))\Big] \varphi(X)\, dX^i =$$

$$= \lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{m=1}^{3} \langle F_m(Y^m), p_m(X, Y^m) \rangle \varphi(X)\, dX^i +$$

$$+ \lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{m=1}^{3} \langle G_m(Y^m), q_m(X, Y^m) \rangle \varphi(X)\, dX^i =$$

$$= \langle F_i(Y^i), \lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} p_i(X, Y^i)\varphi(X)\, dX^i \rangle +$$

$$+ \sum_{i \neq m = 1}^{3} \langle F_m(Y^m), \lim_{x_i \to +0} \int_{\mathbb{R}^2} p_m(X, Y^m)\varphi(X)\, dX^i \rangle +$$

$$+\sum_{m=1}^{3} < G_m(y^m), \lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} q_m(X,y^m)\varphi(X)dX^i> =$$

$$= < F_i(y^i), \varphi(y^i)>, \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3), \quad i=\overline{1,3}.$$

Аналогічно з формул /10/ і /11/ отримуємо

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2}\Delta u(X)\varphi(X)dX^i = < G_i(y^i), \varphi(y^i)>, \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3), \ i=\overline{1,3}.$$

З формул /12/, /13/, /17/, враховуючи поведінку функції $G(X,y)$ і її похідних /5/, /6/, при $|X|\to\infty$ одержуємо, що $u(X)\to 0$ при $|X|\to\infty$.

Теорема доведена.

Постановка узагальненої задачі Неймана.

Нехай $R_i, L_i \in D'(\Gamma_i)$, $i=\overline{1,3}$. Знайти розв"язок рівняння /1/, який задовольняє умови

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{x_i} u(X)\varphi(X)\,dX^i = < R_i(X^i), \varphi(X^i)>; \tag{14}$$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{x_i}\Delta u(X)\varphi(X)dX^i = < L_i(X^i), \varphi(X^i)>, \quad \forall\varphi(X)\in D(\mathbb{R}^3), \ i=\overline{1,3}. \tag{15}$$

За такою ж схемою, як і функція $G(X,y)$, визначена формулою /4/, будується функція Гріна $G_1(X,y)$ класичної задачі Неймана для рівняння /1/, яка має вигляд

$$G_1(X,y) = \sum_{j=1}^{8} e^{-cr_j}. \tag{16}$$

Справедливі такі твердження.

Лема 2. Нехай

$$v_i(X,y^i) = A\left[\Delta_y G_1(X,y) - 2c^2 G_1(X,y)\right]\Big|_{y_i=0};$$

$$\omega_i(X,y^i) = AG_1(X,y)\Big|_{y_i=0}, \quad i=\overline{1,3}.$$

Тоді $\lim\limits_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{y_m} v_m(X,y^m)\varphi(X)dX^i = \begin{cases}\varphi(y^i), & m=i\\ 0, & m\neq i;\end{cases}$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{y_m}\omega_m(X,y^m)\varphi(X)dX^i = 0;$$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{y_m}\Delta v_m(X,y^m)\varphi(X)dX^i = 0;$$

$$\lim_{x_i\to+0}\int_{\mathbb{R}^2} D_{y_m}\Delta\omega_m(X,y^m)\varphi(X)dX^i=\begin{cases}\varphi(y^i), & m=i\\ 0, & m\neq i;\end{cases}$$

$$\forall\varphi(X)\in D(\mathbb{R}^3),\ m,i=\overline{1,3}.$$

<u>Теорема 2.</u> Нехай $R_i,\ L_i\in S'(\Gamma_i),\ i=\overline{1,3}$. Тоді функція $u(X)=\sum_{i=1}^{3}[u_i(X)+\bar{u}_i(X)]$, $X\in\mathbb{R}^3_+$, де

$$u_i(X)=\langle R_i(y^i),\ v_i(X,y^i)\rangle,$$

$$\bar{u}_i(X)=\langle L_i(y^i),\ \omega_i(X,y^i)\rangle,\quad i=\overline{1,3}$$

є розв"язком задачі /1/, /14/, /15/ і $u(X)\to 0$ при $|X|\to\infty$.

Доведення цих тверджень проводиться за такою ж схемою, як і доведення леми 1 та теореми 1.

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1988. 2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М., 1965. 3. Golab J. On the Riquer problem for the iterated Helmholtz equation in octant E_3^+ // Zeszyty Naukowe AGH. 1985. N1001. S.105-113. 4. Golab J. Problem brzegowy Neumanna dla iterowanego równania Helmholtza // Zeszyty Naukowe AGH. 1980. N764. S.31-44.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90

УДК 517.956

В.Г.Костенко, Л.О.Губаль

ЗАДАЧА КОШІ ТА ОДНА ОБЕРНЕНА КОЕФІЦІЄНТНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Тут досліджено задачу про знаходження функцій $u_1(x,t), u_2(x,t), \alpha_1(t), \beta_2(t)$ з умов:

$$\frac{1}{a_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+l_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+k_1u_1+k_2u_2+f_1(x,t), \qquad /1/$$

$$\frac{1}{a_2}\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+l_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+m_1u_1+m_2u_2+f_2(x,t),\ 0<x<h,\ t>-\infty;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\alpha_1(t)u_1+\alpha_2(t)u_2)\Big|_{x=0}=\mu_1(t), \qquad /2/$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\beta_1(t)u_1+\beta_2(t)u_2)\Big|_{x=0}=\mu_2(t),\ t>-\infty;$$

$$u_1(x,t)\big|_{x=h}=\nu_1(t),\ u_2(x,t)\big|_{x=h}=\nu_2(t),\ t>-\infty; \qquad /3/$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=h}=\gamma_1(t),\quad \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=h}=\gamma_2(t),\ t>-\infty. \qquad /4/$$

При цьому $a_i,\ l_i,\ \kappa_i,\ m_i$ / $i=1,2$ / припускаємо відомими сталими, а функції $\beta_1(t),\ \alpha_2(t),\ \mu_i(t),\ \nu_i(t),\ \gamma_i(t),\ f_i(x,t)$ $(i=1,2)$ аналітичними за змінною t і неперервними за x. Зауважимо, що система рівнянь тепловологопереносу зводиться заміною змінних до системи виду /1/.

Функції $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ знаходимо, розв'язуючи задачу Коші /1/, /3/, /4/ символічним методом.

Після дворазового застосування інтегрального оператора

$$J_z=\int_h^x z(\alpha,t)\,d\alpha \qquad /5/$$

до задачі /1/, /3/, /4/ одержуємо еквівалентну останній систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\left(1+\kappa_1J^2+l_1J-\frac{B_1J}{a_1}\right)u_1+\kappa_2J^2u_2=\nu_1(t)+J(\gamma_1(t)+l_1\nu_1(t))-J^2f_1(x,t),$$

$$\left(1+m_2J^2+l_2J-\frac{B_1J}{a_2}\right)u_2+m_1J^2u_1=\nu_2(t)+J(\gamma_2(t)+l_2\nu_2(t))-J^2f_2(x,t), \qquad /6/$$

де $B_1z=J\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial t}Jz$.

Замінюючи в /6/ оператори B_1, J відповідно параметрами λ_1, λ_2, перетворюємо тим самим /6/ у систему алгебраїчних рівнянь для нових невідомих функцій $\bar u_1(x,t,\lambda_1,\lambda_2),\ \bar u_2(x,t,\lambda_1,\lambda_2)$:

$$\left(1+\kappa_1\lambda_2^2+l_1\lambda_2-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1}\right)\bar u_1+\kappa_2\lambda_2^2\bar u_2=\nu_1(t)+\lambda_2(\gamma_1(t)+l_1\nu_1(t))-\lambda_2^2f_1(x,t), \qquad /7/$$

$$m_1\lambda_2^2\bar u_1+\left(1+m_2\lambda_2^2+l_2\lambda_2-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2}\right)\bar u_2=\nu_2(t)+\lambda_2(\gamma_2(t)+l_2\nu_2(t))-\lambda_2^2f_2(x,t).$$

Остання система рівнянь має єдиний розв'язок для усіх достатньо малих за модулем λ_1,λ_2. При цьому він може бути зображений у вигляді

$$\bar u_1(x,t,\lambda_1,\lambda_2)=\bar u_{11}(t,\lambda_1,\lambda_2)+\bar u_{12}(x,t,\lambda_1,\lambda_2),$$

$$\bar u_2(x,t,\lambda_1,\lambda_2)=\bar u_{21}(t,\lambda_1,\lambda_2)+\bar u_{22}(x,t,\lambda_1,\lambda_2), \qquad /8/$$

де

$$\bar u_{11}(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\left(1+m_2\lambda_2^2+l_2\lambda_2-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2}\right)[\nu_1(t)+\lambda_2(\gamma_1(t)+l_1\nu_1(t))]-\kappa_2\lambda_2^2[\nu_2(t)+\lambda_2(\gamma_2(t)+l_2\nu_2(t))]}{\Delta},$$

$$\bar u_{21}(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\left(1+\kappa_1\lambda_2^2+l_1\lambda_2-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1}\right)[\nu_2(t)+\lambda_2(\gamma_2(t)+l_2\nu_2(t))]-m_1\lambda_2^2[\nu_1(t)+\lambda_2(\gamma_1(t)+l_1\nu_1(t))]}{\Delta},$$

$$\bar u_{12}(x,t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\lambda_2^2\left[\kappa_2\lambda_2^2f_2(x,t)-\left(1+m_2\lambda_2^2+l_2\lambda_2-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2}\right)f_1(x,t)\right]}{\Delta},$$

$$\bar{u}_{22}(x,t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\lambda_2^2[m_1\lambda_2^2 f_1(x,t)-(1+\kappa_1\lambda_2^2+l_1\lambda_2-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2})f_2(x,t)]}{\Delta}, \qquad /9/$$

$$\Delta=1-\lambda_2\left\{\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1a_2}(a+b\lambda_2^2+\alpha\lambda_2-\lambda_1\lambda_2)-(l+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_2^2+\delta\lambda_2^3)\right\},$$

$$a=a_1+a_2,\ b=\kappa_1a_1+m_2a_2,\ \alpha=a_1l_1+a_2l_2,\ l=l_1+l_2,\ \beta=\kappa_1+m_2+l_1l_2,$$

$$\gamma=\kappa_1l_2+m_2l_1,\ \delta=\kappa_1m_2-m_1\kappa_2.$$

Крім того, за достатньо малих за модулем λ_1,λ_2

$$\frac{1}{\Delta}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{\kappa=0}^{n-i-j}\sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa}\sum_{m=0}^{i}\sum_{r=0}^{i-m}\sum_{p=0}^{i-m-r}(-1)^{i+j}C_n^iC_{n-i}^jC_{n-i-j}^{\kappa}C_{n-i-j-\kappa}^{s}C_i^mC_{i-m}^rC_{i-m-r}^{p}\times$$

$$\times\frac{a^{n-i-j-\kappa-s}b^{\kappa}\alpha^{s}l^{i-m-r-p}\delta^m\gamma^r\beta^p}{(a_1a_2)^{n-i}}\lambda_1^{n-i+j}\lambda_2^{n+j+2\kappa+s+3m+2r+p}. \qquad /10/$$

Користуючись /8/, /9/, розв"язок задачі /1/, /3/, /4/ зображуємо формулами обернення виду

$$u_1(x,t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int_{C_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\Big\{\bar{u}_{11}(t+\frac{x-h}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2)+\frac{1}{\lambda_2}\int_h^x e^{\frac{\tau_1-h}{\lambda_2}}\bar{u}_{11}(t+\frac{x-\tau_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2)d\tau_1+$$

$$+\frac{1}{\lambda_2^2}\int_h^x d\tau_1\int_h^{\tau_1}e^{\frac{\tau_1-\tau_0}{\lambda_2}}\bar{u}_{12}(\tau_0,t+\frac{x-\tau_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2)d\tau_0\Big\}=u_{11}(x,t)+u_{12}(x,t),$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int_{C_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\Big\{\bar{u}_{21}(t+\frac{x-h}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2)+\frac{1}{\lambda_2}\int_h^x e^{\frac{\tau_1-h}{\lambda_2}}\bar{u}_{21}(t+\frac{x-\tau_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2)d\tau_1+$$

$$+\frac{1}{\lambda_2^2}\int_h^x d\tau_1\int_h^{\tau_1}e^{\frac{\tau_1-\tau_0}{\lambda_2}}\bar{u}_{22}(\tau_0,t+\frac{x-\tau_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2)d\tau_0\Big\}=u_{21}(x,t)+u_{22}(x,t). \qquad /11/$$

Після розкладу в ряди підінтегральних функцій в /11/, застосування теорії лишків і введення позначень $2n-i+2j+2\kappa+s+3m+2r+p=\theta$, $n-i+j=\sigma$ одержуємо

$$u_{11}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{\kappa=0}^{n-i-j}\sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa}\sum_{m=0}^{i}\sum_{r=0}^{i-m}\sum_{p=0}^{i-m-r}(-1)^{i+j}C_n^iC_{n-i}^jC_{n-i-j}^{\kappa}C_{n-i-j-\kappa}^{s}C_i^mC_{i-m}^rC_{i-m-r}^{p}\times$$

$$\times\frac{a^{n-i-j-\kappa-s}b^{\kappa}\alpha^{s}l^{i-m-r-p}\delta^m\gamma^r\beta^p}{(a_1a_2)^{n-i}}\Big\{\nu_1^{(\sigma)}(t)\frac{(x-h)^\theta}{\theta!}+[(l_1+l_2)\nu_1^{(\sigma)}(t)+\gamma_1^{(\sigma)}(t)]\frac{(x-h)^{\theta+1}}{(\theta+1)!}+$$

$$+[(m_2+l_1l_2)\nu_1^{(\sigma)}(t)+l_2\gamma_1^{(\sigma)}(t)-\kappa_2\nu_2^{(\sigma)}(t)-\frac{1}{a_2}\nu_1^{(\sigma+1)}(t)]\frac{(x-h)^{\theta+2}}{(\theta+2)!}+$$

$$+[m_2\gamma_1^{(\sigma)}(t)-\kappa_2\gamma_2^{(\sigma)}(t)+m_2l_1\nu_1^{(\sigma)}(t)-\kappa_2l_2\nu_2^{(\sigma)}(t)-\frac{1}{a_2}(\gamma_1^{(\sigma+1)}(t)+l_1\nu_1^{(\sigma+1)}(t))]\frac{(x-h)^{\theta+3}}{(\theta+3)!}\Big\},$$

$$u_{12}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{\kappa=0}^{n-i-j}\sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa}\sum_{m=0}^{i}\sum_{r=0}^{i-m}\sum_{\rho=0}^{i-m-r}(-1)^{i+j+1}C_n^iC_{n-i}^jC_{n-i-j}^{\kappa}C_{n-i-j-\kappa}^{s}C_i^mC_{i-m}^rC_{i-m-r}^{\rho}\times$$

$$\times\frac{a^{n-i-j-\kappa-s}\delta^{\kappa}\alpha^{s}l^{i-m-r-\rho}\delta^{m}\gamma^{r}\beta^{\rho}}{(a_1a_2)^{n-i}}\left\{\int_h^x\frac{(x-\tau_0)^{\theta+1}}{(\theta+1)!}f_1^{(0,\sigma)}(\tau_0,t)\,d\tau_0+\right.$$

$$\left.+l_2\int_h^x\frac{(x-\tau_0)^{\theta+2}}{(\theta+2)!}f_1^{(0,\sigma)}(\tau_0,t)\,d\tau_0+\int_h^x\frac{(x-\tau_0)^{\theta+3}}{(\theta+3)!}\left[m_2f_1^{(0,\sigma)}(\tau_0,t)-\kappa_2f_2^{(0,\sigma)}(\tau_0,t)-\frac{1}{a_2}f_1^{(0,\tau+1)}(\tau_0,t)\right]d\tau_0\right\},$$

$$u_{21}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{\kappa=0}^{n-i-j}\sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa}\sum_{m=0}^{i}\sum_{r=0}^{i-m}\sum_{\rho=0}^{i-m-r}(-1)^{i+j}C_n^iC_{n-i}^jC_{n-i-j}^{\kappa}C_{n-i-j-\kappa}^{s}C_i^mC_{i-m}^rC_{i-m-r}^{\rho}\times$$

$$\times\frac{a^{n-i-j-\kappa-s}\delta^{\kappa}\alpha^{s}l^{i-m-r-\rho}\delta^{m}\gamma^{r}\beta^{\rho}}{(a_1a_2)^{n-i}}\left\{\nu_2^{(\sigma)}(t)\frac{(x-h)^{\theta}}{\theta!}+\left[(l_1+l_2)\nu_2^{(\sigma)}(t)+\gamma_2^{(\sigma)}(t)\right]\frac{(x-h)^{\theta+1}}{(\theta+1)!}+\right.$$

$$+\left[(\kappa_1+l_1l_2)\nu_2^{(\sigma)}(t)+l_1\gamma_2^{(\sigma)}(t)-m_1\nu_1^{(\sigma)}(t)-\frac{1}{a_1}\nu_2^{(\sigma+1)}(t)\right]\frac{(x-h)^{\theta+2}}{(\theta+2)!}+$$

$$\left.+\left[\kappa_1\gamma_2^{(\sigma)}(t)-m_1\gamma_1^{(\sigma)}(t)+\kappa_1l_2\nu_2^{(\sigma)}(t)-m_1l_1\nu_1^{(\sigma)}(t)-\frac{1}{a_1}\left(\gamma_2^{(\sigma+1)}(t)+l_2\nu_2^{(\sigma+1)}(t)\right)\right]\frac{(x-h)^{\theta+3}}{(\theta+3)!}\right\},$$

$$u_{22}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{\kappa=0}^{n-i-j}\sum_{s=0}^{n-i-j-\kappa}\sum_{m=0}^{i}\sum_{r=0}^{i-m}\sum_{\rho=0}^{i-m-r}(-1)^{i+j+1}C_n^iC_{n-i}^jC_{n-i-j}^{\kappa}C_{n-i-j-\kappa}^{s}C_i^mC_{i-m}^rC_{i-m-r}^{\rho}\times$$

$$\times\frac{a^{n-i-j-\kappa-s}\delta^{\kappa}\alpha^{s}l^{i-m-r-\rho}\delta^{m}\gamma^{r}\beta^{\rho}}{(a_1a_2)^{n-i}}\left\{\int_h^x\frac{(x-\tau_0)^{\theta+1}}{(\theta+1)!}f_2^{(0,\sigma)}(\tau_0,t)\,d\tau_0+\right.$$

$$\left.+l_1\int_h^x\frac{(x-\tau_0)^{\theta+2}}{(\theta+2)!}f_2^{(0,\sigma)}(\tau_0,t)\,d\tau_0+\int_h^x\frac{(x-\tau_0)^{\theta+3}}{(\theta+3)!}\left[\kappa_1f_2^{(0,\sigma)}(\tau_0,t)-m_1f_1^{(0,\sigma)}(\tau_0,t)-\frac{1}{a_1}f_2^{(0,\sigma)}(\tau_0,t)\right]d\tau_0\right\}. \quad /12/$$

Можна переконатися перевіркою, що формули /11/, /12/ задовольняють систему рівнянь /1/ і умови /3/, /4/.

Використовуючи /12/, знаходимо $u_1(0,t)=u_{11}(0,t)+u_{12}(0,t)$, $u_2(0,t)=u_{21}(0,t)+u_{22}(0,t)$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0}$. Після цього з /2/ визначаємо $\alpha_1(t),\beta_2(t)$:

$$\alpha_1(t)=\frac{\mu_1(t)-\alpha_2(t)u_2(0,t)-\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0}}{u_1(0,t)},$$

$$\beta_2(t)=\frac{\mu_2(t)-\beta_1(t)u_1(0,t)-\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0}}{u_2(0,t)},$$

якщо $u_1(0,t)$, $u_2(0,t)\neq 0$.

Зауважимо, що розв"язок /11/, /12/ задачі /1/, /3/, /4/ може бути використаний і для знаходження коефіцієнтів системи рівнянь /1/, якщо, наприклад, додатково задати $u_1(x_0,t_0)$, $u_2(x_0,t_0)$ у фіксованій точці x_0, t_0.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.90

УДК 517.956.2

Г.П. Лопушанська

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ РОЗПОДІЛІВ

Відомо, що коли $\mathcal{E}(x)$ – фундаментальна функція диференціального оператора з постійними коефіцієнтами $\mathcal{L}(D)$, то для довільної $F\in D'(R^n)$ узагальнена функція /у.ф./ $u(x)=\mathcal{E}*F$ /якщо згортка існує/ є розв"язком у D' диференціального рівняння $\mathcal{L}u=F$, єдиним у класі тих функцій, для яких існує згортка із фундаментальною функцією. Дана теорема поширюється на загальні лінійні рівняння у згортках і аналоги її є для нелінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Ми розглянемо аналогічне представлення для розв"язку лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами і на основі цього один метод розв"язування крайових задач для рівнянь з частинними похідними у просторах розподілів.

Нехай $\mathcal{L}(x,D)=\sum\limits_{|k|\le m} a_k(x)D^k$, $a_k(x)\in C^\infty(R^n)$, $\varepsilon(x,y)$ – нормальна фундаментальна функція цього оператора, тобто розв"язок у $D'(R^n)$ рівняння $\mathcal{L}(x,D)\,\mathcal{E}(x,y)=\delta(x-y)$ такий, що $\mathcal{L}^*(y,D)\,\mathcal{E}(x,y)=\delta(x-y)$. Нехай $Z(R^n)=\{\psi(y)=(\varphi(x),\mathcal{E}(x,y)),\varphi\in D\}$ і на $Z(R^n)$ визначено лінійні неперервні функціонали, клас яких позначимо через $Z'(R^n)$. Скажемо, що послідовність $\psi_n(y)=(\varphi_n(x),\mathcal{E}(x,y))\xrightarrow[n\to\infty]{Z} 0$, якщо $\varphi_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{D} 0$. Для довільних $F\in Z'(R^n)$ визначено функціонал $f(x)=f_F:(\varphi(x),f(x))=((\varphi(x)\,\mathcal{E}(x,y)),F(y)),\varphi\in D$. Легко бачити, що $f\in D'(R^n)$.

<u>Теорема 1.</u> Нехай $F\in Z'(R^n),(\varphi(x),u(x))=((\varphi(x),\mathcal{E}(x,y)),F(y))$ для кожної $\varphi\in D(R^n)$. Тоді $u(x)$ є розв"язком у $Z'(R^n)$ рівняння

$$\mathcal{L}(x,D)u(x)=F(x) \qquad /1/$$

і він єдиний.

Справді, для довільної $\psi\in Z(R^n)\ \mathcal{L}^*\psi(y)=\mathcal{L}^*(y,D)(\varphi(x),\mathcal{E}(x,y))=$ $=(\varphi(x),\mathcal{L}^*(y,D)\mathcal{E}(x,y))=(\varphi(x),\delta(x-y))=\varphi(y)\in D(R^n),(\psi,\mathcal{L}u)=(\mathcal{L}^*\psi,u)=(\varphi,u)=(\varphi,F)$.
Якщо $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два розв"язки рівняння /1/ із $D'(R^n)$, то для $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ маємо $\mathcal{L}(x,D)\,u(x)=0$ у $Z'(R^n)$, а для кожної $\varphi\in D$:

$$(\varphi(x),u(x))=(\mathcal{L}^*\psi(y),u(y))=(\psi(y),\mathcal{L}(y,D)u(y))=(\psi,0)=0,$$

тобто $u(x)=0$ в $D'(R^n)$.

У [4, 5] для еліптичного, у [6] для параболічного і в [7] для гіперболічного операторів побудовано представлення розв"язків крайових задач із заданими на границі області узагальненими функціями класів D' за допомогою функції Гріна. Розв"язки задач розуміємо у певному сенсі. Наприклад, для еліптичного оператора $\mathcal{L}$ 2-го порядку розв"язком $u(x)$ в області $\Omega\subset R^n$, обмеженій замкненою поверхнею S класу C^∞ узагальненої задачі Діріхле

$$u\Big|_S=F_1\ ,\quad F_1\in(C^\infty(S))'=D'(S) \qquad /2/$$

називаємо у.ф. u із $D'(\bar\Omega)=(C^\infty(\bar\Omega))'$, таку що

$$(\mathcal{L}^*\psi,u)_\Omega=(\psi,F)_\Omega-\langle Q\psi,F_1\rangle \qquad /3/$$

для довільної $\psi\in D_0(\bar\Omega)=\{\psi\in D(\bar\Omega):\psi|_S=0\}$, $F\in D_0'(\bar\Omega)$; тут $P=a\frac{d}{dN}+\beta$, $Q=a\frac{d}{dN}+\beta-b$, $a(x)=\Big[\sum\limits_{i=1}^n\big(\sum\limits_{k=1}^n a_{ik}(x)n_k(x)\big)^2\Big]^{1/2}$, $b=\sum\limits_{i=1}^n e_i n_i$, $e_i=a-\sum\limits_{k=1}^n\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}$,

$\beta \in D(S)$, n_i – напрямні косинуси внутрішньої нормалі $\vec{n}$, $\frac{d}{d\vec{N}}$ – оператор диференціювання по напрямку конормалі $\vec{N}$, $N_i = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_k$ – напрямні косинуси конормалі, $(\varphi, F)_0$ – дія $F \in D'(\bar{\Omega})$ на $\varphi \in D(\bar{\Omega})$ /а також $F \in D_0'(\bar{\Omega})$ на $\varphi \in D_0(\bar{\Omega})$ /, $\langle \varphi, F \rangle$ – дія $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$.

У [1, 2, 4, 5, 10–13] розглянуто різні постановки узагальнених граничних задач для еліптичних однорідних рівнянь з гладкими коефіцієнтами. На прикладі задачі /1/–/2/ розглянемо ще один, більш загальний, підхід до розв"язування узагальнених граничних задач. Суть його – у зведенні крайової задачі до одного рівняння у просторі у.ф. і розв"язуванні останнього на підставі теореми 1 подібно до того, як у [3] розв"язується узагальнена задача Коші, а у [8, 9] для операторів з постійними коефіцієнтами деякі крайові задачі на областях на площині.

Нехай $U(x)$ – розв"язок задачі /1/–/2/ з гладкими $F(x)$ і $F_1(x)$, $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), x \in \Omega \\ 0, x \in R^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$, $\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), x \in \Omega \\ 0, x \in R^n \setminus \Omega \end{cases}$. Тоді $\tilde{u}(x)$ – регулярна у.ф. і для довільної $\psi \in Z(R^n)$ $(\psi, \mathcal{L}\tilde{u}) = (\mathcal{L}^* \psi, \tilde{u}) = \int_\Omega \mathcal{L}^* \psi(x) u(x) dx =$
$= \int_S \psi P u dS - \int_S Q \psi u dS + \int_\Omega \psi \mathcal{L} u dx = \int_S (\psi P u - Q \psi F_1) dS + \int_\Omega \psi F dx$.

Введемо у.ф. F_{0S}, $Q_S^* F_1 \in D'(R^n)$ з носіями на S, які діють на довільну основну функцію $\psi \in Z(R^n)$ за правилом

$$(\psi, F_{0S}) = \langle \psi, F_0 \rangle, \qquad (\psi, Q_S^* F_1) = \langle Q\psi|_S, F_1 \rangle, \qquad /4/$$

при цьому $\langle \psi, F_0 \rangle = \int_S \psi F_0 dS$, $\langle Q\psi|_S, F_1 \rangle = \int_S Q \psi F_1 dS$ для гладких чи регулярних у.ф. F_0, $F_1 \in D'(S)$. Тепер

$$(\psi, \mathcal{L}\tilde{u}) = (\psi, F_{0S}) - (\psi, Q_S^* F_1) + (\psi, \tilde{F}) \quad \forall \psi \in Z(R^n), \ F_{0S} = Pu|_S. \qquad /5/$$

Це означає, що $\tilde{u}(x)$ є розв"язком у $Z'(R^n)$ диференціального рівняння

$$\mathcal{L}(x, D)\tilde{u}(x) = F_{0S}(x) - Q_S^* F_1(x) + \tilde{F}(x), \quad x \in R^n. \qquad /6/$$

За теоремою 1 $\tilde{u}(x) \in D'(R^n)$ і

$$(\varphi, \tilde{u}) = ((\varphi(x), \mathcal{E}(x,y)), F_{0S}(y) - Q_S^* F_1(y) + \tilde{F}(y)) \quad \forall \varphi \in D(R^n), \qquad /7/$$

а оскільки $\tilde{u}(x) = 0$ при $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$, то із /6/ маємо

$$((\varphi(x), \mathcal{E}(x,y)), F_{0S}(y)) = ((\varphi(x), \mathcal{E}(x,y)), Q_S^* F_1(y) - \tilde{F}(y)) \qquad /8/$$
$$\forall \varphi \in D(R^n \setminus \bar{\Omega}),$$

з огляду на властивості фундаментальної функції еліптичного оператора

$$<\int\limits_{R^n\setminus\bar\Omega}\varphi(x)\mathcal{E}(x,y)dx,\, F_0> = <\int\limits_{R^n\setminus\bar\Omega}\varphi(x)Q_y\mathcal{E}(x,y)dx, F_1> - (\int\limits_{R^n\setminus\bar\Omega}\varphi(x)\mathcal{E}(x,y)dx, \tilde{F}(y))$$

або $\int\limits_{R^n\setminus\bar\Omega}\varphi(x)<\mathcal{E}(x,y),\, F_0(y)>dx = \int\limits_{R^n\setminus\bar\Omega}\varphi(x)<Q_y\,\mathcal{E}(x,y),\, F_1(y)>dx -$

$$-\int\limits_{R^n\setminus\bar\Omega}\varphi(x)(\mathcal{E}(x,y),\, F(y))dx \quad \forall\varphi\in D(R^n\setminus\bar\Omega),$$

тобто

$$<\mathcal{E}(x,y),F_0(y)> = <Q_y\mathcal{E}(x,y),F_1> - (\mathcal{E}(x,y),\, F(y)),\quad x\in R^n\setminus\bar\Omega. \qquad /9/$$

Зауважимо, що у [I2] ([1]) для $F(y)=0$ і $\mathcal{A}=\Delta$ показано, що умова /9/ є необхідною і достатньою для того, щоб розв"язок узагальненої задачі /1/-/2/ /зовнішньої узагальненої задачі Діріхле/ задовольняв /у певному сенсі/ умову $Pu|_S=\frac{\partial u}{\partial n}|_S = F_0$.

Із /8/ чи /9/ можна знайти невідому $F_0\in D'(S)$. Позначимо через $S_{-\varepsilon}$ поверхню в $R^n\setminus\bar\Omega$, паралельну до S і розміщену на відстані ε від неї, для довільної $\varphi(x)\in D(S)$ визначимо $\varphi(x_{-\varepsilon})=\varphi(x)$, якщо $x_{-\varepsilon}=x-\varepsilon\nu(x)$, $x\in S$, $\vec{\nu}(x)$ – орт $\vec{n}(x)$. Тоді із /9/

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{-\varepsilon}}\varphi(x_{-\varepsilon})P_x<\mathcal{E}(x_{-\varepsilon},y),\, F_0(y)>dS_{-\varepsilon} =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{-\varepsilon}}\varphi(x_{-\varepsilon})P_x\left[<Q_y\mathcal{E}(x_{-\varepsilon},y),\, F_1(y)> - (\mathcal{E}(x_{-\varepsilon},y),\, F(y))\right]dS_{-\varepsilon},$$

або, використовуючи аналог теореми Фубіні [3] і лему 1 з [5],

$$<\tfrac{1}{2}\varphi(y)+\int\limits_S\varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS, F_0> =$$

$$= <(Q_y\int\limits_S\varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS)_S, F_1> - (\int\limits_S\varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS, F)\ \forall\varphi\in D(S),$$

тобто $<g,F_0> = <Q\varphi_g,F_1> - (\int\limits_S\varphi_g(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS, F)\ \forall g\in D(S),$

$$Q\varphi_g = (Q_y\int\limits_S\varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS)_S, \qquad /10/$$

де φ_g – розв"язок інтегрального рівняння

$$\varphi(y)+2\int\limits_S\varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)dS = 2g(y),\ y\in S, \qquad /11/$$

яке, як відомо [2, 4], однозначно розв"язане у $D'(S)$.

Покажемо, що у.ф. $F_0 \in D'(S)$, визначена згідно з /10/, /11/, задовольняє /9/. Розглянемо функцію $v(x)=\langle\mathcal{E}(x,y),F_0(y)\rangle - \langle Q_y\mathcal{E}(x,y),F_1(y)\rangle - (\mathcal{E}(x,y),F(y))$. Вона є гладким розв"язком рівняння $\mathcal{L}(x,D)\,v(x) = 0$ у $R^n\setminus\bar{\Omega}$ і задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}}\varphi(x_{-\varepsilon})P_x v(x_{-\varepsilon})dS_{-\varepsilon}=0 \quad \forall\varphi\in D(S),$$

тобто є розв"язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана [2] для однорідного еліптичного рівняння, а тоді за єдиністю розв"язку останнього $v(x)\equiv 0$, $x\in R^n\setminus\bar{\Omega}$, тобто виконується /9/.

Так само доводиться однозначність визначення $F_0\in D'(S)$ із /9/. Справді, якби існували дві у.ф. F_{01} і F_{02}, то у.ф. $\bar{F}_0 = F_{01}-F_{02}$ задовольняла б умову

$$\langle\mathcal{E}(x,y),\bar{F}_0(y)\rangle=0,\ x\in R^n\setminus\bar{\Omega}. \qquad /12/$$

Розглядаючи функцію $w(x)=\langle\mathcal{E}(x,y),\bar{F}_0\rangle$ і враховуючи /12/, отримуємо

$$\mathcal{L}w(x)=0,\ x\in R^n\setminus\bar{\Omega},\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}}\varphi(x_{-\varepsilon})P_x w(x_{-\varepsilon})dS_{-\varepsilon}=0 \quad \forall\varphi\in D(S). \ /13/$$

Але

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}}\varphi(x_{-\varepsilon})P_x w(x_{-\varepsilon})dS_{-\varepsilon}=\langle\tfrac{1}{2}\varphi(y)+\int_S\varphi(x)P_x\mathcal{E}(x,y)\,dS,\bar{F}_0\rangle.$$

Із однозначної розв"язності в $D(S)$ рівняння /11/ і із /13/ дістаємо $\langle g,\bar{F}_0\rangle=0\ \forall g\in D(S)$, що і треба було довести. Таким чином доведена теорема 2.

Теорема 2. Нехай $F\in Z'(\Omega)$, $F_1\in D'(S)$. Існує єдиний розв"язок узагальненої задачі Діріхле /1/-/2/ $u(x)\in D'(\Omega)$, визначений формулою $(\varphi,u)=\langle(\varphi(x),\mathcal{E}(x,y)),F_0(y)\rangle-\langle(\varphi(x),Q_y\mathcal{E}(x,y)),F_1\rangle+$

$$+((\varphi(x),\mathcal{E}(x,y)),F(y)) \quad \forall\varphi\in D(\Omega),$$

де $F_0\in D'(S)$ і визначається із /10/, /11/.

Теорема 3. Нехай $F\in Z'(\bar{\Omega})\cap D_0(\bar{\Omega})$, $F_1\in D'(S)$, $u(x)$ - розв"язок узагальненої задачі Діріхле /1/-/2/ в сенсі /6/, де F_0 визначається із /9/. Тоді $u(x)$ є розв"язком із $D'(\Omega)$ узагальненої задачі /1/-/2/ в сенсі /3/, і навпаки.

Справді, із /6/ для довільної $\psi\in D_0(\bar{\Omega})$ маємо $(\mathcal{L}^*\psi,\tilde{u})= =-\langle Q\psi,F_1\rangle+(\psi,\tilde{F})$, а тоді $(\mathcal{L}^*\psi,u)_0=-\langle Q\psi,F_1\rangle+(\psi,F)_0$. Навпаки, легко перевірити, що у.ф. $u(x)\in D'(\Omega)$, визначена в [4] як єдиний розв"язок задачі /1/-/2/ в сенсі /3/, задовольняє також /6/.

Аналогічні результати правильні для інших крайових задач, внутрішніх і зовнішніх, у тому числі зі змішаними крайовими умовами.

1. Бойко Г.П. Про зв"язок зовнішніх узагальнених задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1974. Вип. 9. С.7-11. 2. Бойко Г.П., Волошина М.С., Гупало А.С. Обобщенная задача Неймана для одного класса эллиптических систем второго порядка // Математ. физика. 1977. Вып. 21. С.65-70. 3. Владимиров В.С Обобщенные функции в математической физике. М., 1979. 4. Гупало Г.С., Лопушанська Г.П. Задача Діріхле для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу в просторі узагальнених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 24. С.16-20. 5. Лопушанская Г.П. О некоторых свойствах решений нелокальных эллиптических задач в пространстве обобщенных функций // Укр. мат.журн. 1989. Т.41. № 11. С.1487-1494. 6. Лопушанская Г.П. О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн. 1986. Т.38. № 6. С.795-798. 7. Лопушанская Г.П. Об одном представлении первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в пространстве обобщенных функций. К., 1986. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2358-Ук.86. 8. Лопушанська Г.П., Новинюк А.А. Про розв"язки у замкненому вигляді класичних і некласичних крайових задач для рівняння коливання струни у напівсмузі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.39. С.8-12. 9. Малаховская Р.М. Приложение операционного метода в обобщенных функциях к исследованию краевых задач // Тр. Томс. ун-та. Сер. мех.-мат. 1975. Т.220. С.29-39. 10. Рогожин В.С., Даняко С.П. О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1971. Т.7. № 3. С.501-509. 11. Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г. Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее применения // Математ. сб. 1969. Т.78. № 3. С.446-472. 12. Szmydt Z. Le rapport mutuel des problemes generalisis de Dirichlet et de Neumann // Ann. Polon. Math. 1966. Vol. 18. N1. P. 31-42.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.90

5-2139

УДК 513

О.Я.Мильо

УМОВИ САМОСПРЯЖЕНОСТІ ТА МАКСИМАЛЬНОЇ АКРЕТИВНОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ НА ПРОМІЖКУ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Нехай $H=L_2(0;1)$, $l(y)=-y''+y$, $D(L_0)=H_0^2(0;1)$,

$L_0 y=-y''+y$.

Оператор L_0 додатно визначений і симетричний. Оператор L_0^* має вигляд $L_0^* y=-y''+y$, де $y\in H^2(0;1)$. Тобто множина $D(L_0)$ виділяється із $D(L_0^*)$ граничними умовами

$$y(0)=y(1)=y'(0)=y'(1)=0 .$$

Отже, $\dim {}^{D(L_0^*)}/D(L_0)=4$, або інакше $L_0\subset^4 L_0^*$ [див. 6]. Розглянемо звуження оператора L_0 на множину

$$\{y\in D(L_0):(y|\psi_1)_1=0,\ (y|\psi_2)_1=0\}.$$

Позначимо дане звуження через L_{min}. ψ_1,ψ_2 належать H_0^1 і лінійно незалежні за модулем H^2. При $\psi_i\in H_0^1\setminus H^2$ оператор L_{min} замкнений і щільно визначений в $L_2(0;1)$, отже, для нього існує спряжений. Позначимо $L_{max}\overset{def}{=}L^*_{min}$. Оскільки за умовою $L_{min}\subset^2 L_0$, то $L_0^*\subset^2 L_{max}$. Таким чином, справедлива лема 1.

Лема 1. $D(L_{max})=D(L_0^*)+sp\{\psi_1,\psi_2\}$.

Отже, для довільного $y\in D(L_{max})$ коректно визначені лінійні функціонали $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$, що визначаються умовою

$$y=x+\alpha_1(y)\psi_1+\alpha_2(y)\psi_2 ,$$

де $x\in H^2$. Причому $L_{max}y=L_0^*x$.

Нехай P – проектор $D(L_{max})$ на $D(L_0^*)$ паралельно $sp\{\psi_1,\psi_2\}$, а $Q=1_{D(L_{max})}-P$.

Введемо позначення

$$(Py)'(0)=\gamma_1(y),\quad \alpha_1(y)=\gamma_5(y),$$
$$(Py)(0)=\gamma_2(y),\quad (y|\psi_1)_1=\gamma_6(y),$$
$$(Py)'(1)=\gamma_3(y),\quad \alpha_2(y)=\gamma_7(y),$$
$$(Py)(1)=\gamma_4(y),\quad (y|\psi_2)_1=\gamma_8(y).$$

Формула Лагранжа матиме вигляд

$$(L_{max}\, y \mid z) - (y \mid L_{max}\, z) =$$
$$= \gamma_1(y)\overline{\gamma_2(z)} - \gamma_2(y)\overline{\gamma_1(z)} - \gamma_3(y)\overline{\gamma_4(z)} + \gamma_4(y)\overline{\gamma_3(z)} -$$
$$- \gamma_5(y)\overline{\gamma_6(z)} + \gamma_6(y)\overline{\gamma_5(z)} - \gamma_7(y)\overline{\gamma_8(z)} + \gamma_8(y)\overline{\gamma_7(z)}\,.$$

Для додатно визначених операторів серед всіх додатно визначених самоспряжених розширень знайдуться два "крайніх" розширення: L_F – "жорстке", або розширення за Фрідріхсом, L_K – "м"яке", або крейнівське [5].

Побудуємо "жорстке" розширення оператора L_{min}.

Нехай He – поповнення $D(L_{min})$ за нормою, породженою скалярним добутком $[x,y] = (L_{min}\, x \mid y)$, $x, y \in D(L_{min})$. "Жорстке" розширення оператора L_{min} є звуженням оператора L_{max} на підпростір $D(L_{max}) \cap He$ [2]. Енергетичний простір He оператора L_{min} становлять елементи y такі, що $\{y \in H_0^1 : (y \mid \psi_1)_1 = (y \mid \psi_2)_1 = 0\}$.

Отже, має місце лема 2.

Лема 2. $D(L_F) = \{ y \in D(L_{max}) :$

$$\gamma_2(y) = \gamma_4(y) = \gamma_6(y) = \gamma_8(y) = 0\}\,.$$

Тепер знайдемо "м"яке" розширення оператора L_{min}. Відомо [5], що $D(L_K) = D(L_{min}) \dot{+} \ker L_{max}$.
Оскільки $\ker L_{max} = sp\{\psi_1, \psi_2, l_+, l_-\}$, де $l_\pm(t) = l^{\pm i}$, то

$$D(L_K) = D(L_{min}) \dot{+} sp\{\psi_1, \psi_2, l_+, l_-\}.$$

Довільне замкнуте симетричне розширення оператора L_{min} є звуженням оператора L_{max} на підпростір в $D(L_{max})$, який визначається симетричним сімейством граничних умов [див.: 2]. Отримуємо лему 3.

Лема 3.

$$D(L_K) = \left\{ y \in D(L_{max}) : \begin{array}{l} 1/\ \gamma_4(y) + \gamma_3(y) = l(\gamma_2(y) + \gamma_1(y)) \\ 2/\ \gamma_4(y) - \gamma_3(y) = \frac{1}{l}(\gamma_2(y) - \gamma_1(y)) \\ 3/\ \gamma_6(y) - \gamma_5(y) = 0 \\ 4/\ \gamma_8(y) - \gamma_7(y) = 0 \end{array} \right\}.$$

Означення 1. A – замкнений симетричний оператор в H. Трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де $\mathcal{H}$ – гільбертів простір, Γ_1, Γ_2 – лінійні відображення $D(A^*)$ в $\mathcal{H}$, називається простором граничних значень оператора A, якщо:

1/ для довільних $f, g \in D(A^*)$

$(A^* f|g) - (f|A^* g) = (\Gamma_1 f|\Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f|\Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}$;

2/ для довільних $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ існує такий вектор $f \in D(A^*)$, що $\Gamma_1 f = F_1$, $\Gamma_2 f = F_2$ [див. 1, с. 158].

Позначимо

$$\Gamma_1 y = \{\gamma_1(y), -\gamma_3(y), -\gamma_5(y), -\gamma_7(y)\},$$

$$\Gamma_2 y = \{\gamma_2(y), \gamma_4(y), \gamma_6(y), \gamma_8(y)\}.$$

Теорема 1. $(\mathbb{C}^4, \Gamma_1, \Gamma_2)$ – простір граничних значень оператора L_{min}.

Справді, формула Лагранжа матиме вигляд

$$(L_{max} y|z) - (y|L_{max} z) =$$
$$= [\gamma_1(y)\overline{\gamma_2(z)} - \gamma_3(y)\overline{\gamma_4(z)} - \gamma_5(y)\overline{\gamma_6(z)} - \gamma_7(y)\overline{\gamma_8(z)}] -$$
$$- [\gamma_2(y)\overline{\gamma_1(z)} - \gamma_4(y)\overline{\gamma_3(z)} - \gamma_6(y)\overline{\gamma_5(z)} - \gamma_8(y)\overline{\gamma_7(z)}] =$$
$$= (\Gamma_1 y|\Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y|\Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4}.$$

В позначеннях Γ_1, Γ_2 леми 2 та 3 матимуть вигляд:

Лема 2. $D(L_F) = \{y \in D(L_{max}) : \Gamma_2 y = 0\}$.

Лема 3. $D(L_K) = \{y \in D(L_{max}) : \Gamma_1 y = \mathcal{E}\Gamma_2 y\}$,

де

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} -\frac{l^2+1}{l^2-1} & \frac{2l}{l^2-1} & 0 & 0 \\ \frac{2l}{l^2-1} & \frac{l^2+1}{l^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Зафіксуємо деяке додатно визначене самоспряжене розширення $\tilde{A}$ оператора A. Має місце розклад

$$D(A^*) = D(\tilde{A}) + \ker A^*. \qquad /1/$$

Позначимо через P і P_0 проектори $D(A^*)$ на $D(\tilde{A})$ і $\ker A^*$, що відповідають розкладу /1/.

Означення 2. Трійка $(\mathcal{H}, \Delta_1, \Delta_2)$, де $\mathcal{H}$ – гільбертів простір, Δ_1, Δ_2 – лінійні відображення $D(A^*) \to \mathcal{H}$, називається позитивним простором граничних значень оператора A, який відповідає розкладу /1/, якщо:

1/ для довільних $f, g \in D(A^*)$

$(A^* f|g) = (\tilde{A} P f|P g) + (\Delta_1 f|\Delta_2 z)_{\mathcal{H}}$;

2/ для довільних $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ існує такий вектор $f \in \mathcal{D}(A^*)$, що $\Delta_1 f = F_1$, $\Delta_2 f = F_2$ [див.: 1, с. 163].

Побудуємо позитивний простір граничних значень оператора L_{min}, що відповідає розширенню L_F.

Позначимо $\Delta_1 = \Gamma_1 - \varepsilon \Gamma_2$, $\Delta_2 = \Gamma_2$.

Запишемо формулу Лагранжа:

$$(L_{max} y | z) - (y | L_{max} z) = (\Gamma_1 y | \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y | \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4} =$$

$$= ((\Delta_1 + \varepsilon \Delta_2) y | \Delta_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Delta_2 y | (\Delta_1 + \varepsilon \Delta_2) z)_{\mathbb{C}^4} =$$

$$= (\Delta_1 y | \Delta_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Delta_2 y | \Delta_1 z)_{\mathbb{C}^4}.$$

Теорема 2. $(\mathbb{C}^4, \Delta_1, \Delta_2)$ – позитивний простір граничних значень оператора L_{min}, що відповідає розширенню L_F.

Нехай оператор L, $L \subset L_{max}$ визначається граничними умовами виду

$$A_{11}\begin{pmatrix}\gamma_1(y)\\ -\gamma_3(y)\end{pmatrix} + A_{12}\begin{pmatrix}-\gamma_5(y)\\ -\gamma_7(y)\end{pmatrix} + B_{11}\begin{pmatrix}\gamma_2(y)\\ \gamma_4(y)\end{pmatrix} + B_{12}\begin{pmatrix}\gamma_6(y)\\ \gamma_8(y)\end{pmatrix} = 0,$$

$$A_{21}\begin{pmatrix}\gamma_1(y)\\ -\gamma_3(y)\end{pmatrix} + A_{22}\begin{pmatrix}-\gamma_5(y)\\ -\gamma_7(y)\end{pmatrix} + B_{21}\begin{pmatrix}\gamma_2(y)\\ \gamma_4(y)\end{pmatrix} + B_{22}\begin{pmatrix}\gamma_6(y)\\ \gamma_8(y)\end{pmatrix} = 0,$$

де A_{ij}, B_{ij} – матриці 2×2. Ці умови можна переписати так:

$$A\Gamma_1 y + B\Gamma_2 y = 0,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи результати, отримані у працях [3, 4, 7], і узагальнюючи описані вище результати, одержуємо теорему 3

Теорема 3.

1/ $L = L^*$ тоді і тільки тоді, коли AB^* – самоспряжена матриця;

2/ $L \geq 0$ тоді і тільки тоді, коли $AB^* \leq 0$;

3/ L – максимально акретивний тоді і тільки тоді, коли $Re(AB^*) \leq 0$.

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984. 2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: Спектральная теория. М., 1966. 3. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отно-

шений // Математ. заметки. 1975. 17. № 1. С.41-48. 4. Кочубей А.М. Про розширення додатно визначеного симетричного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1979. № 3. С. 168-171. 5. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения. I, II // Математ. сб. 1947. 20. № 3. С.431-495; 21. № 3. С.365-404. 6. Лянце В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1972. Вып. 16. С.165-186. 7. Рофе-Бекетов Ф.С. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1969. Вып. 8. С.3-24.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.90

УДК 539.3

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко, Халіль Басьюні

КУСКОВО-ГЛАДКА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ КОШІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА СКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в області $D=\{x,y: 0<x<a; 0<y<b\}$ та задовольняє умову Ліпшіца з постійною L по змінній y. Тоді у достатньо малому околі точки $(x_0, y_0)\in D$ буде існувати єдиний розв"язок задачі Коші:

$$y'=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0. \qquad /1/$$

Доведено*, що коли $hL<1$ та $y_0\neq 0$, то при $|x-x_0|<h$ розв"язок задачі /1/ можна наблизити за допомогою такої лінеаризованої задачі Коші:

$$\tilde{y}'=\kappa(x)\tilde{y}, \quad \tilde{y}(x_0)=y_0, \qquad /2/$$

де

$$\kappa(x)=\frac{f(x,y_0)}{y_0}.$$

Покажемо, як можна узагальнити запропоновану лінеаризацію на випадок довільного скінченного інтервалу $|x-x_0|<H$. Не-

*Мартиненко Марія Д., Басьюні Халіль. Лінеаризація для нелінійної задачі Коші першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.35.

хай m – ціле число, яке задовольняє умову $\frac{HL}{m}<1, x_{i+1}=x_i+h$, де $h=\frac{H}{m}$, $i=\overline{0,m}$. На кожному проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ вихідна задача /1/ конкретизується так:

$$y_i'=f(x,y_i),\ y_i(x_i)=y_i^0,\quad i=\overline{0,m};\ y_0^0=y_0=y(x_0). \qquad /3/$$

Задача /3/ лінеаризується згідно /2/:

$$\tilde{y}_i'=\kappa_i(x)\tilde{y}_i,\quad \tilde{y}_i(x_i)=y_i^0,\ y_i^0=\tilde{y}_{i-1}(x), \qquad /4/$$

де
$$\kappa_i(x)=\frac{f(x,\tilde{y}_i^0)}{\tilde{y}_i^0},\quad \tilde{y}_0^0=y_0.$$

Тут $y_i(x), \tilde{y}_i(x)$ – точний та лінеаризований розв"язок задачі /1/, коли $x\in[x_i, x_{i+1}]$.

Близькість розв"язків задач /3/ та /4/ оцінюється нерівностями

$$\max_{x_i<x<x_i+h}|y_i(x)-\tilde{y}_i(x)|\leqslant\frac{|y_i^0-\tilde{y}_i^0|+h\left[L+\frac{A_i}{|\tilde{y}_i^0|}\right]\max\limits_{x_i<x<x_i+h}|\tilde{y}_i(x)-\tilde{y}_i^0|}{1-hL}; \qquad /5/$$

$$|y_i^0-\tilde{y}_i^0|\leqslant\frac{1}{1-hL}\left\{|y_{i-1}^0-\tilde{y}_i^0|+h\left[L+\frac{A_{i-1}}{|\tilde{y}_{i-1}^0|}\max_{x_{i-1}<x<x_i}|\tilde{y}_i(x)-\tilde{y}_{i-1}^0|\right\}\right.. \qquad /6/$$

Тут
$$A_i=\max_{x_i<x<x_{i+1}}|f(x,\tilde{y}_i^0)|.$$

Легко встановити і таку оцінку близькості розв"язків задачі /1/ та кусково-гладкої лінеаризованої задачі /4/:

$$\max_{x_k<x<x_{k+1}}|y(x)-\tilde{y}(x)|\leqslant\frac{h}{1-Lh}\left\{\sum_{i=0}^{k-1}L\max_{x_i<x<x_{i+1}}|y(x)-\tilde{y}(x)|+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{k}\left[L+\frac{A_i}{|\tilde{y}_i^0|}\right]\max_{x_i<x<x_{i+1}}|\tilde{y}(x)-\tilde{y}_i^0|\right\}. \qquad /7/$$

Нерівності /5/–/6/ та /7/ мають рекурентний характер. Методом послідовних виключень можна позбутися фігуруючих у їх правих частинах перших членів. З цією метою випишемо необхідні нерівності при $K=0$ та $K=1$:

$$\max_{x_0<x<x_1}|y(x)-\tilde{y}(x)|\le\frac{h\left[L+\frac{A_0}{|y_0|}\right]}{1-Lh}\max_{x_0<x<x_1}|\tilde{y}(x)-y_0|;$$

$$\max_{x_1<x<x_2}|y(x)-\tilde{y}(x)|\le\frac{h}{1-Lh}\left\{\frac{L+\frac{A_0}{|y_0|}}{1-Lh}\max_{x_0<x<x_1}|\tilde{y}(x)-y_0|+\right.$$

$$\left.+\left[L+\frac{A_1}{|\tilde{y}_1^0|}\right]\max_{x_1<x<x_2}|\tilde{y}(x)-\tilde{y}_1^0|\right\}.$$

Вищевказаний метод лінеаризації перенесено на розв"язування нелінійних задач Коші та граничних задач другого порядку достатньо загального виду.

Стаття надійшла до редколегії 05.09.90

УДК 517.52

В.О.П"яна

УТОЧНЕННЯ ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ ДЛЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Адамс і Страус [1] показали, що раціональні функції однозначно визначаються прообразами чотирьох точок, тобто якщо f_1 і f_2 – раціональні функції,

$$\left\{z\in\overline{\mathbb{C}}\cdot f_1(z)=a_j\right\}=\left\{z\in\overline{\mathbb{C}}:f_2(z)=a_j\right\},\ j=1,\dots,4,\qquad /1/$$

де $a_1,\dots,a_4$ – різні точки з $\mathbb{C}$, то $f_1(z)=f_2(z)$. Підкреслимо, що мова йде про рівність множин, порядки a_j – точок не враховуються. Уточнимо цю теорему єдиності для раціональних функцій, враховуючи їх степінь. Нагадаємо, що коли раціональна функція $R=P/Q$, де P і Q – нескоротні многочлени, то степенем R називається $\max\{\deg P,\deg Q\}$.

Теорема. Якщо f_1 і f_2 – раціональні функції, $\deg f_1\le 2$, $\deg f_2\le 2$ і /1/ виконується для $j=1, 2, 3$, то $f_1=f_2$. При $\deg f_1\le 3$, $\deg f_2\le 3$ це твердження втрачає силу.

Доведення. Якщо $\deg f_1=\deg f_2=1$, то f_1 і f_2 – дробово-лінійні функції, а в цьому випадку твердження теореми добре відоме. Нехай $\deg f_1=2$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=\infty$, цього завжди можна досягти за допомогою дробово-лінійного перетворення у W – площині.

Серед a_j – точок $(a_j=0,1,\infty)$ функції f_1 принаймні для двох a_j повинні обов"язково бути кратними. У протилежному випадку, якщо, наприклад, всі нулі та полюси f_1 прості, то й у f_2 нулі та полюси прості і $f_1/f_2\equiv C=const$. Оскільки f_1 і f_2 мають спільні одиниці, то $C=1$. Отже, можна вважати, що f_1 має один нуль порядку 2 і один полюс порядку 2. Зробивши дробово-лінійне перетворення в Z – площині, можна вважати, що $f_1(z)=0$ при $z=0$, $f_1(z)=\infty$ при $z=p\neq 0$, а в $z=\infty$ функція f_1 має одиницю. Тобто $f_1(z)=\frac{z^2}{(z-p)^2}$.

Функція $f_2(z)$ не може бути функцією виду $f_2(z)=A\frac{z}{(z-p)^2}$, $A\neq 0$, або $f_2(z)=A\frac{z^2}{z-p}$, $A\neq 0$, або $f_2(z)=A\frac{z^2}{(z-p)^2}$, $A\neq 0,1$, оскільки в $z=\infty$ функція $f_2(z)$ повинна мати одиницю. Звідси випливає, що єдиний можливий варіант представлення f_2 – це функція виду $f_2(z)=\frac{z}{z-p}$. Множини нулів і полюсів $f_1(z)$ і $f_2(z)$ збігаються. Щодо множини одиниць, то у f_2 вона складається з одного значення $z=\infty$, а у f_1 множина одиниць, крім $z=\infty$, містить ще і значення $z=\frac{p}{2}$, що неможливе.

Обмеження на степені f_1 і f_2 не можна послабити. Можна побудувати дві різні раціональні функції третього степеня, що мають однакові множини нулів, полюсів і одиниць. Прикладами таких функцій є функції

$$f_1(z)=\frac{z^2(4z-3-\sqrt{3}i)}{(z-1)^2(4z-1-\sqrt{3}i)} \quad \text{і} \quad f_2(z)=\frac{z(4z-3-\sqrt{3}i)^2}{(z-1)(4z-1-\sqrt{3}i)^2}.$$

У [2] наведено приклад двох різних раціональних функцій четвертого степеня, що мають однакові множини нулів, одиниць і полюсів.

1. Adams W.W., Straus E.G. Non archimedian analytic functions taking the same values at the same points // Ill. J. Math. 1971. Vol. 15. N 3. P. 418-424. 2. Pizer A.K. A problem on rational functions // Amer. Math. Monthly. 1973. Vol. 80. N 5. P. 552-553.

Стаття надійшла до редколегії 06.02.90

6-2139

УДК 517.576

О.Б.Скасків, С.Херате

ОДНА ТЕОРЕМА ТИПУ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Нехай $S(\Lambda)$ - клас цілих функцій $f(z)$, представлених абсолютно збіжними в $\mathbb{C}$ рядами Діріхле

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \ \Lambda=(\lambda_n),\ 0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow\infty\,(1\leq n\to\infty). \qquad /1/$$

У працях [1, 2] досліджувались умови, достатні для виконання при $x\to+\infty$ зовні деякої множини E співвідношення

$$\ln M(x,f)=(1+o(1))\ln\mu(x,f), \qquad /2/$$

де $M(x,f)=\sup\{|f(x+iy)|: y\in\mathbb{R}\}$, $\mu(x,f)=$ $=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}: n\geq 0\}$. Як показано у праці [1], для того, щоб /2/ виконувалося для кожної функції $f\in S(\Lambda)$ при $x\to+\infty$ $(x\notin E$, E - скінченної міри на $[0,+\infty))$, необхідно і досить, щоб $\sum_{n=1}^{\infty}1/(n\lambda_n)<$ $<+\infty$. У праці [2] цей результат уточнено для підкладу $S(\Lambda,\Phi)$ класу $S(\Lambda)$, що складається з функцій f, для яких виконується умова $\ln\mu(x,f)\leq x\Phi(x)$ $(x\geq x_0)$, де $\Phi(x)\uparrow\infty\,(x\to+\infty)$, неперервна на $[0,+\infty)$ функція. При цьому виявлено, що /2/ виконується для кожної $f\in S(\Lambda,\Phi)$ при $x\to+\infty\,(x\notin E$, E - нульової щільності на $[0,+\infty))$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $b>0$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\cdot\sum_{\lambda_n\leq b\Phi(t)}\frac{1}{n\lambda_n}=0. \qquad /3/$$

Виявляється, що останню умову можна послабити, якщо розглянути клас $S_0(\Lambda,\Phi)$ тих функцій $f\in S(\Lambda,\Phi)$ для обчислювальної функції послідовності Λ $(n(t)=\sum_{\lambda_n\leq t}1)$, для показників якої виконуються умови:

а/ $\ln n(t)=O(t)\ (t\to+\infty)$;

б/ $\ln n(qt)\leq Aq\ln n(t)$ для всіх $q>1, t\geq t_0$ при деякому $A>0$.

Справедлива така теорема.

Теорема. Для того щоб співвідношення /2/ виконувалося для кожної функції $f \in S_0(\Lambda, \Phi)$ при $x \to +\infty$ $(x \in E$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{mes}(E \cap [0,x]) = 0)$, необхідно і досить, щоб для кожного $b > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_n \leq b\Phi(t)} \frac{1}{n\lambda_n} = 0 .$$

Метод доведення використовує деякі ідеї праць [1 - 3].

1. Скаскив О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. 1985. Т.37. № 1. С.41-47. 2. Шеремета М.Н. Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Мат. заметки. 1987. Т.42. № 2. С.215-226. 3. Fenton P.C. Wiman-Valyron Theory for entire functions of finite lower growth // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 252. P. 221-232.

Стаття надійшла до редколегії 27.06.90

УДК 512.55

О.Д.Артемович

ПРО ПРАВІ ГАМІЛЬТОНОВІ КІЛЬЦЯ. II

У цій статті продовжується дослідження правих гамільтонових кілець /тобто кілець, всі підкільця яких є праві ідеали/ [3, задача 1.141], розпочате у статті [2].

Користуємось тією ж термінологією, що й раніше [2]. Нагадаємо лише, що внаслідок дослідження [3] радикал Левицького $\mathcal{L}(R)$ правого гамільтонового кільця R збігається з множиною всіх нільпотентних елементів із R.

Наступна теорема описує праці гамільтонові періодичні не нількільця.

Теорема. Нехай R - періодичне кільце, причому $R \neq \mathcal{L}(R)$. Тоді R - праве гамільтонове кільце в тому і лише в тому випадку, коли $R = \mathcal{L}(R) + \Phi$, $\mathcal{L}(R) \cap \Phi = 0$, $\Phi\mathcal{L}(R) = 0$, $\mathcal{L}(R) = \sum_i^{\oplus} \mathcal{L}_{p_i}$, $\mathcal{L}_{p_i}$ - p_i - кільце; $\Phi = \sum_i \oplus \langle e_i \rangle$, $\langle e_i \rangle \simeq \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$ $(n_i \in \mathbb{N})$, причому прямі суми беруться по різних простих числах p_i, $\mathcal{L}_{p_i}^2 = 0$, і або $\mathcal{L}_{p_i} e_i = 0$, або e_i - права одиниця в підкільці $\mathcal{L}_{p_i} + \langle e_i \rangle$.

Доведення. Достатність перевіряється безпосередньо. Необхідність. Нехай спочатку R – праве гамільтонове кільце, адитивна група R^+ якого є примарною абелевою групою для деякого простого числа p, r – ненільпотентний елемент із R. Тоді підкільце $<r>$, породжене цим елементом, скінченне [5, лема 1]. Тому $<r>$ містить ідемпотент e [5, наслідок 1]. З уваги на [4, наслідок 3] існує такий ідеал M, що

$$R=M+<e>, \quad M\cap <e> = 0.$$

Якщо M містить ненільпотентні елементи, то, міркуючи аналогічно, приходимо до існування в M ідемпотента $e_1 \neq 0$. Сума $<e>+<e_1>$ пряма. Справді, $eM \leq <e>, eM \leq M, <e>\cap M=0$, і, як наслідок, $eM=0$, $ee_1=0$, $e_1e = e_1^2e = e_1ee_1 = 0$. Отже, $<e>\oplus <e_1>$ – комутативне гамільтонове кільце, а тому і U – кільце /в сенсі [6]/, що неможливо. Отже, в M всі елементи нільпотентні. Далі, в силу [7, лема 9], M – нільпотентне кільце. Крім того, $<e>\simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $(n\in \mathbb{N})$.

Уточнимо будову кільця $M+<e>$. Для довільного $m\in M$, враховуючи лему 4 [1],

$$me=\gamma_1 m+\gamma_2 m^2 \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}).$$

Тоді

$$me=me^2=\gamma_1 me=\ldots=\gamma_1^k me \quad (k\in \mathbb{N}). \qquad /1/$$

Якщо $\gamma_1=0$, то $me=0$. Коли ж $\gamma_1 \neq 0$, то внаслідок /1/ $(\gamma_1, p)=1$.

Далі із $m^2\neq 0$ та $m^s=0$, де s – індекс нільпотентності елемента m, випливає

$$mem^{s-2}=\gamma_1 m^{s-1}+\gamma_2 m^s,$$
$$0=\gamma_1 m^{s-1}, \quad m^{s-1}=0,$$

всупереч припущенню. Отже, $m^2=0$, і тоді для будь-якого $t\in M$ маємо $0=met=\gamma_1 mt$, $0=mt$.
Таким чином, $M^2=0$.

Нехай тепер R – довільне періодичне праве гамільтонове кільце. Тоді R^+ є прямою сумою примарних груп R_{p_i}, що відповідають різним простим числам p_i. Очевидно, R_{p_i} – ідеал кільця R. На основі вищесказаного

$$R_{p_i}=\mathcal{L}_{p_i}+\langle e_i\rangle,\ \mathcal{L}_{p_i}\cap\langle e_i\rangle=0,$$
$$e_i\mathcal{L}_{p_i}=0,\ \langle e_i\rangle\simeq\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}\ (n_i\in\mathbb{N}),$$
$$\mathcal{L}^2_{p_i}=0;\ l_ie_i=l_i,\ \text{якщо}\ l_i\in\mathcal{L}_{p_i}.$$

Позначимо $\mathcal{L}=\sum_i\oplus\mathcal{L}_{p_i}$, $\Phi=\sum_i\oplus\langle e_i\rangle$.
Тоді, очевидно, $\mathcal{L}$ – радикал Левицького кільця R, $\Phi\mathcal{L}=0$.
Теорема доведена.

1. Андриянов В.И., Фрейдман П.А. О гамильтоновых кольцах // Уч. зап. Свердлов. гос. пед. ин-та. 1965. Вып. 31. С.3-23. 2. Артемович О.Д. Про праві гамільтонові кільця // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 34. С.70-73. 3. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Новосибирск, 1982. 4. Фрейдман П.А. Кольца с правым идеализаторным условием // Математ. зап. Уральск. ун-та, 1963. Т.4. Тетр. 3. С.51-58. 5. Фрейдман П.А. Кольца с идеализаторным условием. II // Уч. зап. Уральск. ун-та. 1959. Т.23 /мат. № 2/. Тетр. 1. С.35-48. 6. Фред ан П.А. Кольца с идеализаторным условием // Уч. зап. Уральск. ун-та. 1960. Т.23 /мат. № 2/. Тетр. 3. С.49-61. 7. Хмельницкий И.Л. Кольца, в которых все подкольца являются метаидеалами конечного идекса // Изв. вузов. Математика. 1979. № 4. С.53-67.

Стаття надійшла до редколегії 29.04.90

УДК 512.58 + 515.12

М.М.Зарічний

ПРОДОВЖЕННЯ ПРИРОДНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ НА КАТЕГОРІЇ КЛЕЙСЛІ

Всі необхідні означення з теорії категорій можна знайти у праці [2]. Ї.Вінарек [3] розглянув задачу продовження функторів на категорії Клейслі і показав, що продовження функтора $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ на категорію Клейслі $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ монади $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ на категорії $\mathcal{C}$ перебувають у біективній відповідності з природними перетвореннями $\xi: FT\to TF$, для яких $\xi\circ F\eta=\eta F$ і $\xi\circ F\mu=\mu F\circ T\xi\circ\xi T$ /такі природні перетворення ми будемо називати асоційованими з відповідними продовженнями/.

У цій статті ми розглядаємо таку задачу. Нехай t : $F\longrightarrow F'$ – природне перетворення ендофункторів у категорії

$\mathscr{C}, \bar F, \bar F'$ - продовження функторів F, F' відповідно на категорію $\mathscr{C}_{\mathbb{T}}$. Коли t є також природним перетворенням продовжених функторів $\bar F, \bar F'$?

Позначимо через $\xi : FT \longrightarrow TF$, $\xi' : F'T \longrightarrow TF'$ природні перетворення, асоційовані з продовженнями $\bar F$ і $\bar F'$ відповідно.

Означення. Природне перетворення $t : F \longrightarrow F'$ називається $\mathbb{T}$ -узгодженим, якщо $Tt \circ \xi = \xi' \circ tT$.

Теорема 1. Для того щоб природне перетворення $t : F \to F'$ було також і природним перетворенням продовжених функторів, необхідно і досить, щоб воно було $\mathbb{T}$ -узгодженим.

Доведення. Необхідність. Нехай $f : X \longrightarrow TY$ - морфізм в $\mathscr{C}$. Розглядаючи f як морфізм з X в Y в категорії $\mathscr{C}_{\mathbb{T}}$, одержуємо

$$\bar F' f * tX = \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ TF'f \circ \eta F'X \circ tX =$$
$$= \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ \eta F'TY \circ F'f \circ tX =$$
$$= \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ \eta F'TY \circ TtY \circ Ff =$$
$$= \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ TtTY \circ \eta FTY \circ Ff =$$
$$= \mu F'Y \circ T^2 tY \circ T\xi Y \circ \eta FTY \circ Ff =$$
$$= \mu F'Y \circ T^2 tY \circ \eta TFY \circ \xi Y \circ Ff =$$
$$= \mu F'Y \circ \eta TF'Y \circ TtY \circ \xi Y \circ Ff =$$
$$= \mu F'Y \circ T\eta F'Y \circ TtY \circ \xi Y \circ Ff =$$
$$= tY * \bar F f,$$

тобто $t : \bar F \longrightarrow \bar F'$ - природне перетворення.

Достатність. Беручи у наведених вище міркуваннях $f = 1_{TY} : TY \longrightarrow TY$, одержуємо, що $\xi Y \circ TtY =$
$= \mu F'Y \circ T\eta F'Y \circ TtY \circ \xi Y \circ 1_{FTY} =$
$= \mu F'Y \circ T\xi'Y \circ \eta F'TY \circ tTY \circ 1_{FTY} =$
$= \mu F'Y \circ \eta TF'Y \circ \xi Y \circ tTY = \xi Y \circ tTY,$

тобто природне перетворення t є $\mathbb{T}$ - узгодженим. Теорема доведена.

Твердження 1. Природне перетворення $\xi = \eta T \circ \mu : T^2 \to T^2$ є асоційованим з продовженням функтора T на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

Твердження 2. Нехай функтори $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ продовжуються на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ і $\xi : FT \to TF$, $\xi' : F'T \to TF'$ – природні перетворення, асоційовані з цими продовженнями. Тоді природне перетворення $\widetilde{\xi} = \xi' F \circ F' \xi$ є асоційованим з продовженням функтора $\widetilde{F} = F'F$ на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

Доведення проводяться безпосередньо.

З тверджень 1 і 2 випливає, що довільна скінченна ітерація T^k функтора T продовжується на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

Нехай для природного перетворення $\xi : T^2 \to T^2$, асоційованого з деяким продовженням функтора T на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, виконана умова

$$/*/ \qquad \xi \circ \mu T = T\mu \circ \xi T \circ T\xi .$$

Тоді для будь-якого $k \geq 1$ природне перетворення $\widetilde{\xi}_k = \xi T^{k-1} \circ T\xi T^{k-2} \circ \ldots \circ T^{k-2}\xi T \circ T^{k-1}\xi$ асоційоване з продовженням функтора T^k на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$. Це перевіряється безпосередніми обчисленнями.

Твердження 3. Природне перетворення $\mu T^{k-2} : T^k \to T^{k-1}$, $k \geq 2$, є $\mathbb{T}$ – узгодженим щодо продовжень функторів T^k, T^{k-1} на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, з якими асоційовані природні перетворення $\widetilde{\xi}_k$, $\widetilde{\xi}_{k-1}$ відповідно.

Доведення. Перевіряємо умову $\mathbb{T}$ – узгодженості:

$$\widetilde{\xi}_{k-1} \circ \mu T^{k-1} = \xi T^{k-2} \circ T\xi T^{k-3} \circ \ldots \circ T^{k-3}\xi T \circ$$
$$\circ T^{k-2}\xi \circ \mu T^{k-1} = \xi T^{k-2} \circ T\xi T^{k-3} \circ \ldots \circ T^{k-3}\xi T \circ$$
$$\circ \mu T^{k-1} \circ T^{k-1}\xi = \ldots = \xi T^{k-2} \circ \ldots \circ \mu T^{k-1} \circ$$
$$\circ T^2 \xi T^{k-3} \circ \ldots \circ T^{k-2}\xi T \circ T^{k-1}\xi = T\mu T^{k-2} \circ$$
$$\circ \xi T^{k-1} \circ T\xi T^{k-2} \circ T^2 \xi T^{k-3} \circ \ldots \circ T^{k-2}\xi T \circ$$
$$\circ T^{k-1}\xi = \widetilde{\xi}_{k-1} \circ \mu T^{k-1}$$

/у передостанній рівності використана умова /*//.

Нехай тепер $\mathcal{C}$ – повна категорія. Індукцією за ординалом $\alpha \geq 1$ означимо ітерацію T^α функтора T і природні перетворення $\mu_{\alpha\beta} : T^\alpha \to T^\beta$, $\alpha \geq \beta$.

Приймемо $T^1 = T$, $T^{\alpha+1} = TT^\alpha$, $\mu_{\alpha\alpha} = 1_{T^\alpha}$, $\mu_{\alpha+2,\alpha+1} = \mu T^\alpha$. Якщо α – граничний ординал і для всіх α', β', $\alpha > \alpha' \geq \beta'$ означені $T^{\alpha'}$ і $\mu_{\alpha'\beta'}$, то приймаємо $(T^{\alpha}, \mu_{\alpha\alpha'}) = \underleftarrow{\lim}\{T^{\alpha'}, \mu_{\alpha'\beta'}; \alpha', \beta' < \alpha\}$. Неважко перевірити, що коректність такого означення випливає з асоціативності множення μ.

Позначимо через φ^{α} обернену систему $\{T^{\alpha'}X, \mu_{\alpha'\beta'}X; \alpha', \beta' < \alpha\}$. Нехай $\xi : T^2 \to T^2$ – природне перетворення, що задовольняє умову /*/ і асоційоване з деяким продовженням функтора T на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$. Для кожного $\alpha \geq 1$ означимо природне перетворення $\tilde{\xi}_{\alpha} : TT^{\alpha} \to T^{\alpha}T$, виходячи з умов:

1/ $\tilde{\xi}_1 = \xi$;

2/ якщо $\alpha = (\alpha - 1) + 1$, то $\tilde{\xi}_{\alpha} = \tilde{\xi}_{\alpha+1}T \circ T^{\alpha-1}\xi$;

3/ якщо $\beta' \leq \beta$, то діаграма

$$\begin{tikzcd}
T^{\beta}T \arrow[r, "\tilde{\xi}_{\beta}"] \arrow[d, "\mu_{\beta\beta'}T"'] & TT^{\beta} \arrow[d, "T\mu_{\beta\beta'}"] \\
T^{\beta'}T \arrow[r, "\tilde{\xi}_{\beta'}"] & TT^{\beta'}
\end{tikzcd}$$

комутативна /тобто для кожного X сім"я $\{\tilde{\xi}_{\beta}X \mid \beta < \alpha\}$ є морфізмом оберненої системи φ^{α}_{TX} в систему $T(\varphi^{\alpha}_{X})$/ і $\tilde{\xi}_{\alpha}X = \underline{\lim}\{\tilde{\xi}_{\beta}X \mid \beta < \alpha\}$.

<u>Теорема 2.</u> Природне перетворення $\tilde{\xi}_{\alpha}$ асоційоване з продовженням функтора T^{α} на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

<u>Приклади.</u> 1. Для природного перетворення $\xi = \eta T \circ \mu : T^2 \to T^2$ виконана умова /*/.

2. Нехай $\mathbb{H} = (exp, s, u)$ – монада гіперпростору на категорії компактів $Comp$ [1]. Природне перетворення $t : exp^2 \to exp^2$, задане формулою $tX(\mathcal{A}) = \{B \in expX \mid B \subset uX(\mathcal{A})$, $B \cap A \neq \emptyset$ для всіх $A \in \mathcal{A}\}$ задовольняє умову /*/.

Дійсно, якщо $\mathfrak{A} \in exp^3 X$, тоді $tX \circ u\,exp X(\mathfrak{A}) =$

$= \{B \in exp X \mid B \subset uX \circ u\,exp X(\mathfrak{A})$, $B \cap A \neq \emptyset$ для всіх $A \in \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$, $exp\,uX \circ t\,expX \circ exp\,tX(\mathfrak{A}) =$

$= \{uX(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in exp^2 X$, $\mathcal{B} \subset u\,exp X \circ exp\,tX(\mathfrak{A})$, $\mathcal{B} \cap tX(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ для всіх $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$.

Якщо $\mathcal{B} \in exp^2 X$, $\mathcal{B} \subset u\, exp\, X \circ exp\, tX(\mathfrak{A})$ і $\mathcal{B} \cap tX(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ для всіх $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, то, припускаючи, що $uX(\mathcal{B}) \cap A_0 \neq \emptyset$ для деякого $A_0 \in \mathcal{A}_0 \in \mathfrak{A}$, одержуємо $\mathcal{B} \cap tX(\mathcal{A}_0) \neq \emptyset$. Але тоді для $C \in tX(\mathcal{A}_0) \cap \mathcal{B}$ маємо $C \cap A_0 \neq \emptyset$, що приводить до суперечності. Отже, $exp\, uX \circ t\, exp\, X \circ exp\, tX(\mathfrak{A}) \subset$ $\subset tX \circ u\, exp\, X(\mathfrak{A})$.

Щоб показати обернене включення, досить розглянути випадок скінченного X. Нехай $B \in tX \circ u\, exp\, X(\mathfrak{A})$ і $\mathcal{B} = \{ B \cap uX(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{A} \}$, тоді $\mathcal{B} \in exp^2 X$, $uX(\mathcal{B}) = B$ і $\mathcal{B} \cap tX(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ для всіх $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. Залишилося показати, що $\mathcal{B} \subset u\, exp\, X \circ exp\, tX(\mathfrak{A})$. Вибираючи $C_0 \in \mathcal{B}$, знаходимо $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{A}$ таке, що $C_0 = B \cap uX(\mathcal{A}_0)$. Тоді $C_0 \in tX(\mathcal{A}_0)$ і $C_0 \in u\, exp\, X \circ exp\, tX(\mathfrak{A})$.

Принагідно хочу висловити подяку М.Я.Комарницькому, який ознайомив мене з цією тематикою.

1. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // Успехи мат. наук. 1986. Т.41. Вып. 6. С.121-159. 2. MacLane S. Categories for the working mathematician. Berlin, 1971. 3. Vinárek J. Projective monads and extensions of functors // Math. Centr. Afd. 1983. N 195. P.1-12.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90

УДК 515.12

Т.О.Банах

ПРО ОДИН КЛАС НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ МНОГОВИДІВ

Надалі $\mathcal{C}$ означатиме клас метричних компактів, $\mathcal{C}_{fd}$ – клас скінченновимірних компактів, l_2 – стандартний сепарабельний гільбертів простір.

Нехай $A \in \mathcal{C}$. Під похідною $A^{(1)}$ компакта A ми розуміємо множину $A^{(1)} = \{x \in A \mid$ існує окіл $U \ni x, \dim U < \infty\}$. Легко бачити, що $A^{(1)}$ – замкнена множина в компакті A. Індуктивно означимо n-ну похідну $A^{(n)}$ компакта A: $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^{(1)}$, $n > 1$. Зауважимо, що для похідної справедливі такі властивості, які виправдовують термін "похідна": $(A \times B)^{(1)} = (A^{(1)} \times B) \cup (A \times B^{(1)})$, $(A \cup B)^{(1)} = A^{(1)} \cup B^{(1)}$.

Розглянемо клас $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, A^{(n)} = \emptyset\}$. Очевидно, що $\mathcal{C}_{fd} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{C}$. Можна показати, що для компактів $A, B \in \mathcal{K}$ і замкненої множини $C \subset A$ виконуються умови: /i/ $A \times B \in \mathcal{K}$; /ii/ $A \cup B \in \mathcal{K}$; /iii/ $C \in \mathcal{K}$; /iy/ $A/C \in \mathcal{K}$. Розглянемо компакт $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n \subset l_2$, де $K_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^n \times \{(0,0,\dots)\} \subset l_2$. Оскільки $K^{(1)} = \{*\} = \{(0,0,\dots)\}$, то $K \in \mathcal{K}$. Розглянемо пряму границю $K^\infty = \varinjlim \{K^n, i_n\}$, де $i_n : K^n \hookrightarrow K^{n+1}$ – вкладення, $i_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, *)$.

Нехай $\mathcal{D}$ – деякий клас просторів. Простір X будемо називати сильно універсальним для класу $\mathcal{D}$ /сильно $\mathcal{D}$-універсальним/, якщо для будь-якої пари (A, B), де $A, B \in \mathcal{D}$ і $B \subset A$ – замкнена множина, довільне вкладення $f: B \hookrightarrow X$ продовжується до вкладення $\bar{f}: A \hookrightarrow X$.

Відомо*, що простір $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \mathbb{R}^n$ є сильно універсальним для класу $\mathcal{C}_{fd}$, а простір $Q^\infty = \varinjlim Q^n$ – сильно універсальним для класу $\mathcal{C}$.

<u>Теорема 1</u>. Простір K^∞ є сильно універсальний для класу $\mathcal{K}$.

Доведемо спочатку деякі допоміжні твердження.

---

* Sakai K. On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds // Top. Appl. 1984. Vol.18. N1. P.69-80.

Лема 1. Нехай $A \in \mathcal{K}$, $A^{(1)} = \{*\}$, тоді існує вкладення $i: A \hookrightarrow K$.

Доведення. Нехай d – обмежена одиницею метрика на компакті A. Розглянемо множини $A_n = \{x \in A \mid 2^{-n} \leq d(x,*) \leq 2^{-n+1}\}, n \geq 1$. Очевидно, що $A \setminus \{*\} = \cup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ і $\dim A_n < \infty$, $n \geq 1$. Задамо рекурентно послідовність чисел $i(n): i(1) = 2\dim A_1 + 1$, $i(n+1) = i(n) + 2\dim(A_{n+1}/(A_n \cap A_{n+1})) + 1$. Побудуємо індуктивно послідовність вкладень $i_n: A_n \hookrightarrow K_{i(n)}$, $n \geq 1$, де $K_m = [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]^m \subset K$, так, щоб задовольнялись умови

$$
\begin{aligned}
(*_n) \quad & i_n(A_n) \not\ni * \, ; \; i_n(A_n \cap A_{n+1}) \subset K_{i(n+1)} ; \\
& i_{n+1} | A_n \cap A_{n+1} = i_n | A_n \cap A_{n+1} ; \\
& i_{n+1}(x) \neq i_k(y), k \leq n, y \in A_k, x \in A_{n+1}, x \neq y .
\end{aligned}
$$

Покажемо, як будувати крок індукції. Нехай $i_k: A_k \hookrightarrow K_{i(k)}, k \leq n$, вже побудовані. Тоді $i_n(A_n \cap A_{n+1}) \subset K_{i(n)} \cap K_{i(n+1)}$. Оскільки $K_{i(n)} \cap K_{i(n+1)}$ – AR – компакт, то існує $f: A_{n+1} \to K_{i(n)} \cap K_{i(n+1)}$ – продовження відображення $i_n | A_n \cap A_{n+1}$. Причому f можна вибрати так, щоб $f(A_{n+1} \cap A_{n+2}) \subset K_{i(n)} \cap K_{i(n+2)}$. Нехай $\pi: A_{n+1} \to A_{n+1}/(A_{n+1} \cap A_n)$ – фактор-відображення і $j: A_{n+1}/(A_{n+1} \cap A_n) \hookrightarrow [-\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+2}]^{i(n+1)-i(n)}$ – вкладення, для якого $j(A_n \cap A_{n+1}) = \{(0,0,\dots)\}$. Приймемо $i_{n+1} = f \times (j \circ \pi): A_{n+1} \to (K_{i(n+2)} \cap K_{i(n)}) \times [-\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+2}]^{i(n+1)-i(n)} \subset K_{i(n+1)}$. Очевидно, що всі умови з $(*_{n+1})$ виконуються. Легко бачити, що відображення $i: A \to K$,

$$
i(a) = \begin{cases} i_n(a) , & \text{якщо } a \in A_n , \\ (0,0,\dots) , & \text{якщо } a = * , \end{cases}
$$

є шуканим вкладенням. Лема доведена.

Лема 2. Якщо для компакту A, $A^{(n+1)} = \emptyset$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, то існує вкладення $i: A \hookrightarrow K^{n+1}$, причому, якщо $x \in A$ – фіксована точка компакту A, то вкладення можна вибрати таким, що $i(x) = (*, \dots, *)$.

Доведення. Розглянемо послідовність $A \supset A^{(1)} \supset \dots A^{(n)} \supset A^{(n+1)} = \emptyset$. Нехай $x \in A^{(k)}$, $x \notin A^{(k+1)}$, $k \leq n$.

Оскільки $A^{(n+1)} = \emptyset$, то компакт $A^{(n)}$ скінченновимірний та існує вкладення $i_n: A^{(n)} \hookrightarrow K$ /якщо $x \in A^{(n)}$, то $i_n(x) = *$, якщо $x \notin A^{(n)}$, то $i_n(A^{(n)}) \not\ni *$ /. Оскільки $K \in AR$, то існує $\bar{i}_n : A^{(n-1)} \to K$ – продовження відображення i_n. Розглянемо компакт $A^{(n-1)}/A^{(n)}$. Для нього перша похідна складається з однієї точки $\{A^{(n)}\}$, тому, за щойно доведеною лемою, існує вкладення $j : A^{(n-1)}/A^{(n)} \hookrightarrow K$, $j(A^{(n)}) = *$. Прийнявши $i_{n-1} = \bar{i}_n \times (j \circ \pi) : A^{(n-1)} \to K^2$, де $\pi : A^{(n-1)} \to A^{(n-1)}/A^{(n)}$ – фактор-відображення, одержимо вкладення компакту $A^{(n-1)}$ в K^2. Продовжуючи цю процедуру, отримаємо вкладення $i_{k+1} : A^{(k+1)} \hookrightarrow K^{n-k}$ таке, що $i_{k+1}(A^{(k+1)}) \not\ni (*,\dots,*)$. Оскільки $K^{n-k} \in AR$, то існує $\bar{i}_{k+1} : A^{(k)} \hookrightarrow K^{n-k}$ – продовження відображення i_{k+1} таке, що $\bar{i}_{k+1}(x) = (*,\dots,*)$. Використовуючи вкладення $j : A^{(k)}/(A^{(k+1)} \cup \{x\}) \hookrightarrow K$, $j(A^{(k+1)} \cup \{x\}) = *$, будуємо вкладення $i_k : A^{(k)} \hookrightarrow K^{n-k+1}$, що продовжує i_{k+1}. Продовжуючи цей процес, отримуємо вкладення $i : A \hookrightarrow K^{n+1}$, для якого $i(x) = (*,\dots,*)$. Лема доведена.

Повернемось тепер до доведення теореми 1. Нехай $A \in \mathcal{K}$, $B \subset A$ і $f : B \hookrightarrow K^\infty$ – вкладення. Існує номер $n \in \mathbb{N}$ такий, що $f(B) \subset K^n$. Оскільки $K^n \in AR$, то існує продовження $\bar{f} : A \to K^n$ відображення f. Розглянемо фактор-відображення $\pi : A \to A/B$. Оскільки $A/B \in \mathcal{K}$, то, за лемою 2, існує вкладення $j : A/B \hookrightarrow K^m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$, причому $j(B) = (*,\dots,*)$. Відображення $g = \bar{f} \times (j \circ \pi) : A \to K^n \times K^m \subset K^\infty$ – шукане вкладення, що продовжує вкладення f. Теорема доведена.

Використовуючи сильну $\mathcal{K}$ – універсальність простору K^∞, стандартною технікою доводимо таке твердження:

Теорема 2. Будь-який гомеоморфізм між компактними підмножинами простору K^∞ продовжується до автогомеоморфізму K^∞.

Наслідок 1. Простір K^∞ топологічно однорідний.

Теорема 3. Простір K^∞ має базу з множин, гомеоморфних K^∞ /тобто K^∞ – локально собі подібний/.

Доведення. Оскільки простір K^∞ топологічно однорідний, достатньо показати, що для будь-якого околу $U \ni *$ існує окіл $V \subset U$ такий, що $\bar{V} \cong K^\infty$, але це очевидно.

Наслідок 2. Кожен простір $A \in \mathcal{K}$ зображається у вигляді об"єднання скінченновимірних компактів.

Оскільки простір K^∞ топологічно однорідний і локально подібний собі, можна розглядати многовиди, модельовані на просторі K^∞.

Теорема 4. Характеризація K^∞ – многовидів. Простір $X \in AE(\mathcal{C})$ $(ANE(\mathcal{C}))$ гомеоморфний K^∞ / K^∞ – многовиду/

тоді і тільки тоді, коли:

$$X = \underset{\longrightarrow}{\lim} X_i \ , \ X_i \in \mathcal{K} \ ; \qquad /1/$$

X – сильно універсальний для класу $\mathcal{K}$ /2/.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.90

УДК 539.377:536.12

І.І.Верба

РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НАПІВБЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ У ПЕРЕМІЩЕННЯХ

Щоб перевірити ефективність методу продовження функцій при розв"язуванні задач термопружності в переміщеннях, розглянемо статичну задачу термопружності для тонкої напівбезмежної $x_1 \geqslant 0$ ізотропної пластинки з тепловіддачею, що допускає розв"язок у явному вигляді.

Припустимо, що на поверхні $x_1 = 0$ задана температура $t_0 f(x_2)$. Тоді для визначення стаціонарного температурного поля в пластинці маємо першу граничну задачу для рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} - \varkappa^2 T = 0,$$

$$T|_{x_1=0} = t_0 f(x_2),$$

$$T|_{(x_1,x_2)\to\infty}, \ \frac{\partial T}{\partial x_i}\Big|_{(x_1,x_2)\to\infty} \to 0 \quad (i=1,2).$$

Використовуючи перетворення Фур"є по x_2, розв"язок задачі теплопровідності запишемо у вигляді

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x_2)}\, e^{-i\eta x_2 - \gamma x_1} d\eta ,$$

де $\overline{f(x_2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2) e^{i\eta x_2} dx_2 \ , \ \gamma = \sqrt{\eta^2 + \varkappa^2}$.

Знайдемо розв"язок задачі термопружності у переміщеннях. Компоненти переміщень точок серединної площини пластинки u_1, u_2 задовольняють рівняння

$$\frac{2}{1+\nu} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{i\mp1}^2} + \frac{\partial^2 u_{i\pm1}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2\alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i=1,2), \qquad /1/$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення, $i \pm 1 = \begin{cases} 2, & i=1; \\ 1, & i=2. \end{cases}$

Нехай пластинка вільна від зовнішнього навантаження, тобто

$$\sigma_{11}\Big|_{x_1=0} = \sigma_{12}\Big|_{x_1=0} = 0, \qquad /2/$$

де компоненти тензора напружень σ_{ij} пов"язані з компонентами вектора переміщень u_i співвідношеннями Дюгамеля-Неймана

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial u_{i\pm1}}{\partial x_{i\pm1}} - (1+\nu)\alpha_t T\right] \quad (i=1,2), \\ \sigma_{12} &= G\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \end{aligned}\right\} \qquad /3/$$

G – модуль зсуву.

Крім того, припустимо, що на безмежності функції u_i і їх перші похідні прямують до нуля.

Застосовуючи перетворення Фур"є по x_2, для трансформант вектора переміщень $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ одержимо рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \eta^2\right)^2 \bar{u}_1 = (1+\nu)\alpha_t \varkappa^2 \frac{d\bar{T}}{dx_1},$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \eta^2\right)^2 \bar{u}_2 = (1+\nu)\alpha_t \varkappa^2 i\eta \bar{T} \qquad /4/$$

і граничні умови

$$\bar{\sigma}_{11}\Big|_{x_1=0} = \bar{\sigma}_{12}\Big|_{x_1=0} = 0, \qquad /5/$$

де $\bar{u}_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_i e^{i\eta x_2} dx_2$, $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{ij} e^{i\eta x_2} dx_2$.

З урахуванням умов на безмежності розв"язок граничної задачі /4/, /5/ запишеться у вигляді

$$\bar{u}_1 = \frac{\alpha_t t_0 \overline{f(x_2)}}{\varkappa^2}\Big\{\big[2|\eta| - (1-\nu)\gamma - (1+\nu)|\eta|(\gamma - |\eta|)x_1\big] e^{-|\eta| x_1} - (1+\nu)\gamma e^{-\gamma x_1}\Big\},$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\alpha_t t_0 \bar{f}(x_2)}{\varkappa^2} i \Big\{ \big[(1-\nu)|\eta| - 2\gamma + (1+\nu)|\eta| (\gamma -$$

$$- |\eta|) x_1 \big] e^{-|\eta| x_1} + (1+\nu)|\eta| e^{-\gamma x_1} \Big\} . \qquad /6/$$

Розв"язок граничної задачі /1/, /2/ знайдемо, використовуючи обернене перетворення Фур"є

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}_i e^{-i\eta x_2} d\eta \quad (i = 1,2). \qquad /7/$$

Знайдемо розв"язок задачі термопружності /1/, /2/ методом продовження функцій [1] і покажемо, що при $x_1 = 0$ він збігається з /7/. Вводимо в розгляд узагальнені функції $\mathcal{U}_i$, що збігаються з u_i при $x_1 \geq 0$ і дорівнюють нулю при $x_1 < 0$

$$\mathcal{U}_i = u_i S_-(x_1) ,$$

де $S_-(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0 ; \\ 0, & x_1 < 0 . \end{cases}$

Використовуючи правила диференціювання узагальнених функцій, граничні умови /2/ на поверхні $x_1 = 0$, систему рівнянь рівноваги /1/ у просторі узагальнених функцій запишемо у такому вигляді:

$$\frac{2}{1+\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|_{x_1=0} \delta_-(x_1) +$$

$$+ \frac{2}{1+\nu} u_1\Big|_{x_1=0} \delta_-'(x_1) + 2\alpha_t \Big[\frac{\partial T}{\partial x_1} S_-(x_1) + T\Big|_{x_1=0} \delta_-(x_1) \Big] ,$$

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_2}{\partial x_1^2} + \frac{2}{1+\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big|_{x_1=0} \delta_-(x_1) + \qquad /8/$$

$$+ \frac{1-\nu}{1+\nu} u_2\Big|_{x_1=0} \delta_-'(x_1) + 2\alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_2} S_-(x_1) ,$$

де $\delta_-(x_1) = \dfrac{dS_-(x_1)}{dx_1}$, $\delta_-'(x_1) = \dfrac{d\delta_-(x_1)}{dx_1}$ – відповідно асиметричні дельта-функція та її перша похідна [2].

За допомогою перетворення Фур"є по x_2 для трансформант $\bar{\mathcal{U}}_i$ одержимо рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \eta^2\right)^2 \bar{\mathcal{U}}_1 = A_1 \delta_-'''(x_1) - \nu i \eta A_2 \delta_-''(x_1) - (\nu+2)\eta^2 A_1 \delta_-'(x_1) -$$

$$-i\eta^3 A_2\delta_-(x_1)+a\left[-\gamma\varkappa^2 e^{-\gamma x_1}S_-(x_1)+\varkappa^2\delta_-(x_1)-\gamma\delta_-'(x_1)+\delta_-''(x_1)\right],$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2}-\eta^2\right)^2\bar{U}_2=A_2\delta_-'''(x_1)-i\eta A_1\delta_-''(x_1)+\nu\eta^2A_2\delta_-'(x_1)-$$

$$-\nu i\eta^3A_1\delta_-(x_1)+ai\eta\left[\varkappa^2e^{-\gamma x_1}S_-(x_1)-\gamma\delta_-(x_1)+\delta_-'(x_1)\right], \qquad /9/$$

де $A_1=\bar{u}_1\big|_{x_1=0}$, $A_2=\bar{u}_2\big|_{x_1=0}$, $a=(1+\nu)\alpha_t t_0\overline{f(x_2)}$.

Розв"язки рівнянь /9/ з урахуванням умов на безмежності мають вигляд

$$\bar{U}_1=\frac{\alpha_t t_0\overline{f(x_2)}}{2\varkappa^2}\Big\{\Big[\big(2|\eta|-(1-\nu)\gamma\big)(1+\operatorname{sign}_- x_1)-(1+\nu)|\eta|\times$$

$$\times(\gamma-|\eta|)(|x_1|_-+x_1)\Big]e^{-|\eta||x_1|}-2(1+\nu)\gamma e^{-\gamma x_1}S_-(x_1)\Big\},$$

$$\bar{U}_2=\frac{\alpha_t t_0\overline{f(x_2)}}{2\varkappa^2}i\Big\{\Big[\big((1-\nu)|\eta|-2\gamma\big)(1+\operatorname{sign}_- x_1)+(1+\nu)|\eta|\times \qquad /10/$$

$$\times(\gamma-|\eta|)(|x_1|_-+x_1)\Big]e^{-|\eta||x_1|}+2(1+\nu)|\eta|e^{-\gamma x_1}S_-(x_1)\Big\},$$

де $\operatorname{sign}_- x_1=2S_-(x_1)-1$, $|x_1|_-=x_1\operatorname{sign}_- x_1$.

З отриманого результату бачимо, що трансформанти Фур"є $\bar{U}_i$ та $\bar{u}_i$ зв"язані таким чином:

$$\bar{U}_i=\begin{cases}\bar{u}_i, & x_1\geq 0;\\ 0, & x_1=0.\end{cases}$$

Враховуючи формули /7/, аналогічні рівності можна записати і для оригіналів U_i та u_i.

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1976. 2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 17.10.90

УДК 517.433:530.145

П.І.Тацуняк

РОЗВ"ЯЗОК РІВНЯНЬ ВЕКТОРНО-СКАЛЯРНОЇ МОДЕЛІ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ І ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛУ ВАЙТМАНА

Для ілюстрації аксіоматичного методу Вайтмана у квантовій теорії поля розглянемо модель взаємодії векторного поля з похідною скалярного поля, яка задається лагранжіаном $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{вз}$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} + M^2 U_\mu U^\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + m^2\varphi^2\right), \qquad /1/$$

$$\mathcal{L}_{вз} = \lambda\left(U^\mu\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\varphi U^\mu\right), \qquad /1а/$$

де $U(U_1, U_2, U_3, U_0)$ – 4-вектор оператора векторного поля; φ – оператор скалярного поля; λ – константа взаємодії. Метрика задається тензором

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{00} = 1; \quad g^{\mu\nu} = 0,\ \mu \neq \nu\ (\mu, \nu = 1,2,3,0). \qquad /3/$$

Повторення індексу означає суму. Для спрощення запису знак суми і метричний тензор не пишуться, наприклад:

$$\sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu \equiv x^\mu y_\mu = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_0 y_0 = xy = \bar{x}\bar{y} - x_0 y_0 . \qquad /4/$$

Для забезпечення додатності тензора енергії векторне поле повинно задовольняти умову Лоренца [1]:

$$\frac{\partial U^\mu}{\partial x_\mu} = 0. \qquad /5/$$

Рівняння поля моделі одержуються із /1/, /1а/, з урахуванням виразу /5/ як рівняння Ейлера:

$$(\Box - M^2)U_\mu(x) = j_\mu(x); \qquad /6/$$

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0, \qquad /7/$$

де $j_\mu = \lambda\left[\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right]_+ = \lambda\frac{\partial}{\partial x_\mu} :\varphi^2(x):$ /6а/

Символ :: означає нормальний добуток польових операторів за Віком [1]: $:\varphi^2(x): = \lim_{y\to x}[\varphi(x)\varphi(y) - \Delta^+(x-y; m^2)$, /8/

де Δ^+ додатно-частотна сингулярна функція квантової теорії поля:

$$\Delta^+(x;m^2) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int dp\,\theta(p_0)\,\delta(p^2+m^2)\,e^{ipx}\,. \qquad /9/$$

Польові оператори задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\left[U_\mu^{in}(x), U_\nu^{in}(x')\right]_- = i\Delta^+_{\mu\nu}(x-x';M^2) = i\left(g^{\mu\nu}+\frac{1}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\Delta^+(x-x';M^2); \qquad /10/$$

$$\left[U_\mu(x), U_\nu(x')\right]_- = 0;\ (x-x')^2 > 0; \qquad /11/$$

$$\left[U_\mu^{in}(x), \varphi(x')\right]_- = 0\ ;\ (\Box - M)\,U_\mu^{in}(x) = 0\,; \qquad /12/$$

$$\left[\varphi(x), \varphi(x')\right]_- = i\Delta^+(x-x';m^2)\,. \qquad /13/$$

Беручи дивергенцію з обох боків у рівнянні /6/ і враховуючи /5/, одержуємо $(\Box - M^2)\dfrac{\partial U_\mu}{\partial x^\mu} = \dfrac{\partial j_\mu}{\partial x^\mu} = 0$, звідки для дивергенції струму маємо умову

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0 \qquad /14/$$

як результат умови Лоренца /5/.

Розв"язок системи /6/, /7/ з урахуванням /14/ одержуємо за допомогою формули

$$U_\mu(x) = U_\mu^{in}(x) + \int dx'\,\Delta^r_{\mu\nu}(x-x';M^2)\,j^\nu(x'), \qquad /15/$$

де U_μ^{in} – оператор невзаємодіючого поля; $\Delta^r_{\mu\nu}$ – запізнювальна функція Гріна векторного поля:

$$\Delta^r_{\mu\nu}(x;M^2) = \left(g^{\mu\nu}+\frac{1}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\Delta^r(x;M^2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{dk\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{M^2}\right)}{k^2+M^2-2i\varepsilon k_0}\,e^{ikx} \qquad /16/$$

і де

$$\Delta^r(x;M^2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{dk\,e^{ikx}}{k^2+M^2-2i\varepsilon k_0}\,, \qquad /17/$$

що задовольняє рівняння $(\Box - M^2)\,\Delta^r(x;M^2) = \delta(x)$.

/17a/

Підставляючи /15/ у /6/

$$(\Box-M^2)U^{in}_{\mu\nu}(x)+\int dx'\left(g^{\mu\nu}+\frac{1}{M^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\right)(\Box-M^2)\Delta^r(x-x';M^2)\,j_\nu(x')=j^\mu(x),$$

і враховуючи далі /12/ і /17а/, одержуємо

$$0+\left(g^{\mu\nu}+\frac{1}{M^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\right)\int dx'\,\delta(x-x')\,j_\nu(x')=j^\mu(x).$$

Після інтеграції беремо дивергенцію з огляду на /14/ одержуємо остаточно

$$-\frac{1}{M^2}(\Box-M^2)\,\frac{\partial j_\mu}{\partial x^\mu}=\frac{\partial j_\mu}{\partial x^\mu}=0.$$

Отже, /15/ з точністю до дивергенції є розв"язком системи /6/, /7/.

Тепер за допомогою розв"язку /15/ обчислимо функціонал Вайтмана другого порядку [5]:

$$W_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2)=\langle U_{\mu_1}(x_1)U_{\mu_2}(x_2)\rangle_0=\langle U^{in}_{\mu_1}(x_1)U^{in}_{\mu_2}(x_2)\rangle_0+$$

$$+\lambda^2\int dx_1'dx_2'\,\Delta^r_{\mu_1\nu_1}(x_1-x_1';M^2)\Delta^r_{\mu_1\nu_1}(x_2-x_2';M^2)\langle j^{\nu_1}(x_1')j^{\nu_2}(x_2')\rangle_0, \quad /18/$$

де $\langle\ \rangle_0$ означає середнє за вакуумом у просторі станів Фока [1].

Для функціонала невзаємодіючого поля, враховуючи /9/ і /10/, маємо

$$W^{in}_{\mu_1\mu_2}=\langle U^{in}_{\mu_1}(x_1)U^{in}_{\mu_2}(x_2)\rangle_0=i\Delta^+_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2;M^2)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int dp\,\theta(p_0)\left(g^{\mu_1\mu_2}-\frac{p^{\mu_1}p^{\mu_2}}{M^2}\right)\delta(p^2+M^2)e^{ip(x_1-x_2)} \quad /19/$$

або

$$g^{\mu_1\mu_2}W^{in}_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2)=3i\Delta^+(x_1-x_2;M^2). \quad /20/$$

Для обчислення другого доданка у /18/ розглянемо окремо

$$\langle j^{\nu_1}(x_1)j^{\nu_2}(x_2)\rangle_0=\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}}\,\omega(x_1;x_2), \quad /21/$$

де, враховуючи теорему Віка, із /8/ одержимо

$$\omega(x_1;x_2)=\langle:\varphi(x_1)\varphi(x_1)::\varphi(x_2)\varphi(x_2):\rangle_0=-2\left[\Delta^+(x_1-x_2;m^2)\right]^2. \quad /21а/$$

Вираз $[\Delta^+(x;m^2)]^2$ обчислений В.Тіррінгом [4]:

$$[\Delta^+(x;m^2)]^2=\frac{1}{(4\pi)^2 i}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\,\Delta^+(x;c). \quad /22/$$

Враховуючи /16/, /21/, /21a/ і /22/, у другому доданку /18/ маємо

$$\frac{2i\lambda^2}{(2\pi)^{11}(4\pi)^2}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\int\frac{dk_1dk_2\left(g^{\mu_1\nu_1}-\frac{k^{\mu_1}k^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}-\frac{k^{\mu_2}k^{\nu_2}}{M^2}\right)}{(k_1^2+M^2-2i\varepsilon k_{10})(k_2^2+M^2-2i\varepsilon k_{20})}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial x'_{\nu_1}\partial x'_{\nu_2}}\Delta^+(x'_1-x'_2;c)\,dx'_1dx'_2=\frac{2\lambda^2}{(2\pi)^{11}(4\pi)^2}\int\frac{dk_1dk_2\left(g^{\mu_1\nu_1}-\frac{k^{\mu_1}k^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}-\frac{k^{\mu_2}k^{\nu_2}}{M^2}\right)}{(k_1^2+M^2-2i\varepsilon k_{10})(k_2^2+M^2-2i\varepsilon k_{20})}\times$$

$$\times\int dp\,\theta(p_0)p_{\nu_1}p_{\nu_2}\,\delta(p^2+c)\int dx'_1dx'_2\,e^{i[k_1(x_1-x'_1)+k_2(x_2-x'_2)+p(x'_1-x'_2)]}=$$

$$=\frac{2\lambda^2}{(2\pi)^3(4\pi)^2}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\int dp\,\theta(p_0)p_{\nu_1}p_{\nu_2}\,\delta(p^2+c)\,e^{ip(x_1-x_2)}\times$$

$$\times\int dk_1dk_2\frac{\left(g^{\mu_1\nu_1}-\frac{k^{\mu_1}k^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}-\frac{k^{\mu_2}k^{\nu_2}}{M^2}\right)}{(k_1^2+M^2-2i\varepsilon k_{10})(k_2^2+M^2-2i\varepsilon k_{20})}\,\delta(k_1-p)\,\delta(k_2+p)=$$

$$=\frac{2\lambda^2}{(2\pi)^3(4\pi)^2}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\int dp\,\theta(p_0)\frac{\left(g^{\mu_1\nu_1}+\frac{p^{\mu_1}p^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}+\frac{p^{\mu_2}p^{\nu_2}}{M^2}\right)}{(p^2+M^2)^2+4\varepsilon^2p_0^2}p_{\nu_1}p_{\nu_2}\,\delta(p^2+c)\,e^{ip(x_1-x_2)}.\tag{23}$$

Окремо обчислимо множник, який відповідає компонентам функціоналу Вайтмана

$$W_{\mu_1\mu_2}\sim\left(g^{\mu_1\nu_1}+\frac{p^{\mu_1}p^{\nu_1}}{M^2}\right)\left(g^{\mu_2\nu_2}+\frac{p^{\mu_2}p^{\nu_2}}{M^2}\right)p_{\nu_1}p_{\nu_2}=$$

$$=g^{\mu_1\nu_1}g^{\mu_2\nu_2}p_{\nu_1}p_{\nu_2}+2\frac{p^{\mu_1}p^{\mu_2}}{M^2}p^2+\frac{p^{\mu_1}p^{\mu_2}}{M^4}p^4=\frac{p^{\mu_1}p^{\mu_2}}{M^4}(M^2+p^2)^2.$$

Сума діагональних компонент функціоналу /слід/ має зручний лоренц-інваріантний вигляд

$$g^{\mu_1\mu_2}W_{\mu_1\mu_2}=W_{11}+W_{22}+W_{33}-W_{00}\sim\frac{p^2}{M^4}(p^2+M)^2.\tag{24}$$

Враховуючи /24/ у /23/ і повертаючись до /18/ разом із /19/, одержуємо

$$g^{\mu_1\mu_2}W_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2) = 3i\Delta^+(x_1-x_2;\,M^2) +$$

$$+\frac{2\lambda^2}{(2\pi)^3(4\pi)^2}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{dc}{c}\sqrt{c(c-4m^2)}\int\frac{dp\,\theta(p_0)p^2(p^2+M^2)^2}{M^4(p^2+M^2)^2}\,\delta(p^2+c)e^{ip(x_1-x_2)} =$$

$$= 3i\Delta^+(x_1-x_2;M^2) - \frac{2i\lambda^2}{(4\pi)^2M^4}\int\limits_{4m^2}^{\infty}dc\sqrt{c(c-4m^2)}\,\Delta^+(x_1-x_2;c) =$$

$$= i\int\limits_0^{\infty}dc\left[3\delta(c-M^2) - \frac{\lambda^2\theta(c-4m^2)}{2(2\pi)^2M^4}\sqrt{c(c-4m^2)}\right]\Delta^+(x_1-x_2;c),$$

що є представленням Лемана [2] для функціоналу Вайтмана другого порядку

$$g^{\mu_1\mu_2}W_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2) = i\int\limits_0^{\infty}dc\,\rho(c)\,\Delta^+(x_1-x_2;c), \qquad /25/$$

$$\rho(c) = 3\delta(c-M^2) - \frac{\lambda^2\theta(c-4m^2)}{2(2\pi)^2M^4}\sqrt{c(c-4m^2)}, \qquad /25а/$$

де $\rho(c)$ – спектральна функція представлення. Носій спектральної функції складається з однієї ізольованої точки $c = M^2$ за умови $M < 2m$ і неперервної частини $c \geqslant 4m^2$. Така модель фізично можлива, тому що описує щонайменш одну стабільну частинку маси M.

У випадку двовимірної моделі, яка визначається метричним тензором $g^{11} = -g^{00} = 1;\ g^{\mu\nu} = 0,\ \mu \neq \nu\ (\mu,\nu = 1,0)$, представлення /25/ має спектральну функцію виду

$$\rho(c) = \delta(c-M^2) - \frac{\lambda^2\theta(c-4m^2)\,c}{2\pi M^4\sqrt{c(c-4m^2)}}, \qquad /25б/$$

для обчислення якої використано вираз $[\Delta^+(x;c)]^2$ із праці [3].

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1976. 2. Леман Г. О свойствах функций распространения и констант перенормировки квантованных полей // Проблемы современной физики. М., 1955. С.133-

144. 3. Т а ц у н я к П.І. Множення додатно-частотних функцій Гріна двовимірної квантової теорії поля // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 32. С.35-38. 4. Т и р р и н г В.Е. Принципы квантовой электродинамики. М., 1964. С.209. 5. Wightman A.S. Quantum fields theory in terms of vacuum expectation values // Phys. Rev. 1956. Vol.101. N1. P. 860.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.90

УДК 539.377:536.12

І.М.Колодій, Б.В.Ковальчук, І.І.Верба, І.Т.Горинь

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РОТЕ ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ОДНОРІДНИХ ТІЛ

Розглянемо задачу про охолодження однорідного шару товщиною $2l$, нагрітого до високої температури t_0, порядку 2000 $^{\circ}$С. Через поверхні шару $x = \pm l$ здійснюється теплообмін з зовнішнім середовищем температури $g(\tau)$ за законом Ньютона. Тоді у випадку симетрії задачі щодо поверхні $x = 0$ для визначення нестаціонарного температурного поля в шарі матимемо задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right) = c(t)\frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad t = t(x,\tau); \qquad /1/$$

$$t\big|_{\tau=0} = t_0; \qquad /2/$$

$$\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,$$

$$\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=l} = -\alpha(t-g(\tau))\Big|_{x=l}, \qquad /3/$$

де $\lambda(t) = \lambda_0 t^{\nu}$, $c(t) = c_0 t^{\nu}$, $\nu \geq 0$.

Після заміни $T = t^{\nu+1}$ для знаходження T отримаємо крайову задачу з нелінійними граничними умовами на поверхні

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad T = T(X, Fo); \qquad /4/$$

$$T|_{Fo=0}=0, \qquad /5/$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{X=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{X=1}=-Bi(\nu+1)\left(T^{\frac{1}{\nu+1}}(X,Fo)-T_c\right)\Big|_{X=1}, \qquad /6/$$

де $T_0=t_0^{\nu+1}$; $T_c=g\left(c_0\frac{l^2}{\lambda_0}Fo\right)$; $X=\frac{x}{l}$ - безрозмірна координата; $Bi=\frac{\alpha l}{\lambda_0}$ - критерій Біо; $Fo=\frac{\lambda_0\tau}{C_0 l^2}$ - критерій Фур"е.

Задачу /4/-/6/ розв"язуємо методом Роте [3]. Розіб"ємо проміжок $[0, Fo^*]$ зміни Fo на n рівних частин точками $Fo_k=kh$, $h=\frac{Fo^*}{n}$, $k=0,1,\ldots,n$. У рівнянні /4/ приймемо $Fo=Fo_{k+1}$ і похідну по Fo замінимо на різницеву. В результаті отримаємо звичайні диференціальні рівняння для функцій $T_{k+1}(X)$, які є наближеними значеннями функції $T(X,Fo_{k+1})$

$$\frac{d^2T_{k+1}(X)}{dX^2}=\frac{T_{k+1}(X)-T_k(X)}{h}. \qquad /7/$$

Функцію $T_0(X)$ задовольнимо початковій умові/5/

$$T_0(X)=T_0 . \qquad /8/$$

Решту $T_{k+1}(X)$ задовольнятимуть умови /6/

$$\left.\frac{dT_{k+1}(X)}{dX}\right|_{X=0}=0,$$

$$\left.\frac{dT_{k+1}(X)}{dX}\right|_{X=1}=-Bi(\nu+1)\left(T_{k+1}^{\frac{1}{\nu+1}}(X)-T_{c,k+1}\right)\Big|_{X=1}, \qquad /9/$$

де $T_{c,k+1}=g\left(\frac{\lambda_0 l^2}{C_0}Fo_{k+1}\right)$.

Нами запропоновано в граничних умовах /9/ справа замість $T_{k+1}^{\frac{1}{\nu+1}}(X)$ використовувати інформацію попереднього шару, тобто $T_{k+1}^{\frac{1}{\nu+1}}(X)$ замінити на $T_k^{\frac{1}{\nu+1}}(X)$, що дає змогу отримати лінійні /на відміну від нелінійних /9// граничні умови /7/

з початковими умовами /8/

$$\left.\frac{dT_{K+1}(X)}{dX}\right|_{X=0}=0,$$

$$\left.\frac{dT_{K+1}(X)}{dX}\right|_{X=1}=-Bi(\nu+1)\left(T_K^{\frac{1}{\nu+1}}(X)-T_{C,K+1}\right)\Big|_{X=1}. \qquad /10/$$

Такий підхід ми назвали метод Роте з запізненням. Отже, розв'язування задачі /4/-/6/ методом Роте приводить до розв"язування послідовності граничних задач для лінійного рівняння з нелінійними граничними умовами /7/-/9/, а методом Роте з запізненням - до послідовності лінійних граничних задач /7/, /8/, /10/.

Підставимо в рівняння /7/ $K=0$. Оскільки $T_0(X)$ відоме з /8/, то знайдемо $T_1(X)$, розв"язок рівняння /7/, що задовольняє умову /9/ або /10/. Потім підставимо в /7/ $K=1$ і знайдемо $T_2(X)$ і т.д.

Загальний розв"язок рівняння /7/ має вигляд

$$T_{K+1}(X)=A_{K+1}\,ch\frac{X}{\sqrt{h}}+B_{K+1}\,sh\frac{X}{\sqrt{h}}+\frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^X T_K(\xi)\,sh\frac{\xi-X}{\sqrt{h}}\,d\xi. \qquad /11/$$

Задовольнивши граничні умови /9/ або /10/, отримаємо відповідно

$$B_{K+1}=0,$$

$$A_{K+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\,sh\frac{1}{\sqrt{h}}\right)^{-1}\left[\frac{1}{h}\int_0^1 T_K(\xi)\,ch\frac{\xi-1}{\sqrt{h}}\,d\xi-\right.$$

$$\left.-Bi(\nu+1)\left(\left(A_{K+1}\,ch\frac{1}{\sqrt{h}}+\frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^1 T_K(\xi)\,sh\frac{\xi-1}{\sqrt{h}}\,d\xi\right)^{\frac{1}{\nu+1}}-T_{C,K+1}\right)\right]; \qquad /12/$$

$$B_{K+1}=0,$$

$$A_{K+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\,sh\frac{1}{\sqrt{h}}\right)^{-1}\left[\frac{1}{h}\int_0^1 T_K(\xi)\,ch\frac{\xi-1}{\sqrt{h}}\,d\xi-\right.$$

$$\left.-Bi(\nu+1)\left(T_K^{\frac{1}{\nu+1}}(1)-T_{C,K+1}\right)\right]. \qquad /13/$$

Отже, розв"язок методом Роте і методом Роте з запізненням має вигляд

$$T_{k+1}(X) = A_{k+1}\, ch\frac{X}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^X T_k(\xi)\, sh\frac{\xi - X}{\sqrt{h}}\, d\xi . \qquad /14/$$

Оскільки $T_0(X) = T_0 = const$, то інтеграли у правій частині /14/ можна обчислити. Автори провели такі обчислення при $k = 1, 2, \ldots, 10$. Наведемо перші з отриманих виразів

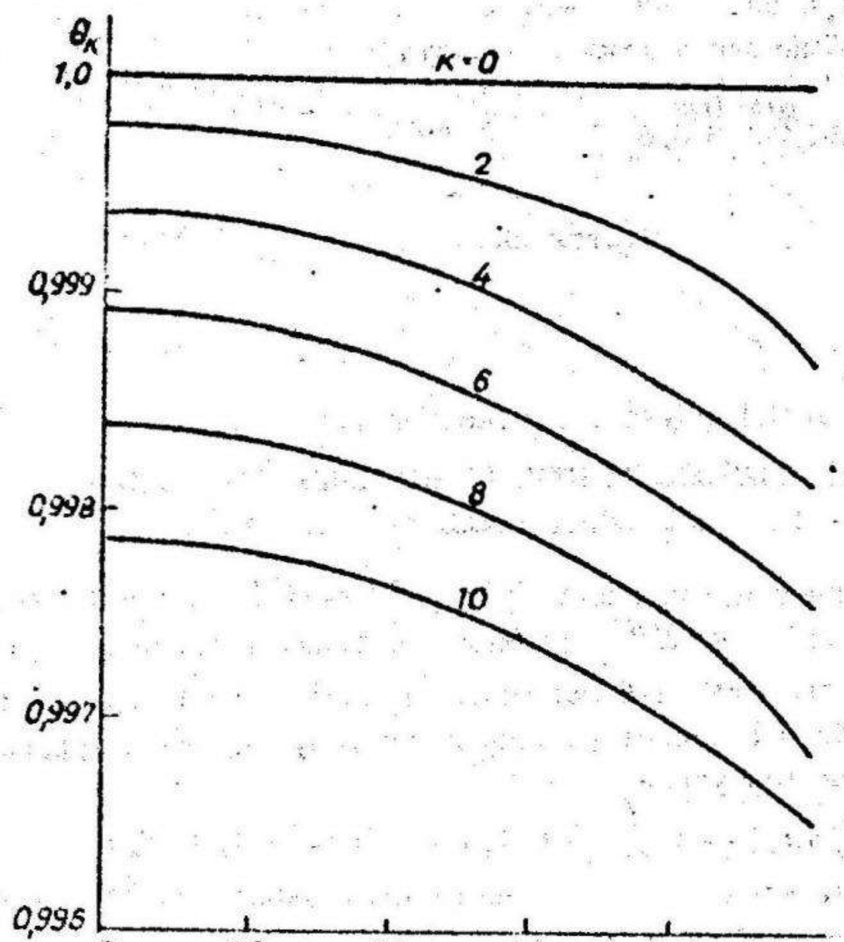
$$T_1(X) = T_0 + (A_1 - T_0)\, ch\frac{X}{\sqrt{h}} ,$$

$$T_2(X) = T_0 + (A_2 - T_0)\, ch\frac{X}{\sqrt{h}} - \frac{1}{2}(A_1 - T_0)\frac{X}{\sqrt{h}}\, sh\frac{X}{\sqrt{h}} ,$$

$$T_3(X) = T_0 + (A_3 - T_0)\, ch\frac{X}{\sqrt{h}} - \Big(\frac{1}{2}(A_2 - T_0) - \qquad /15/$$

$$- \frac{1}{8}(A_1 - T_0)\Big)\frac{X}{\sqrt{h}}\, sh\frac{X}{\sqrt{h}} + \frac{1}{8}(A_1 - T_0)\Big(\frac{X}{\sqrt{h}}\Big)^2 ch\frac{X}{\sqrt{h}} ,$$

. . . .



Доведено існування розв"язку задачі /4/-/6/ методом Роте [2]. Користуючись принципом максимуму статті [2] і повторюючи міркування [1, с. 493], можна довести, що

$$|T(X,FO_\kappa) - T_\kappa(X)| \leq FO^* \varepsilon ,$$

де ε не залежить від κ і прямує до нуля разом з h.

При $V=1$, $t_0=2000\,^\circ C$, $Bi=1$, $T_C=20\,^\circ C$, $FO^*=1$, $h=0,1$ проведене числове дослідження наближеного значення безрозмірної температури $\theta_\kappa(X)=T_\kappa^{1}(X)/t_0$ методом Роте. Результати обчислень представлені у вигляді графіків на рисунку. Функції $T_K(X)$ обчислювалися за формулами /14/ і за явними формулами /15/. Результати обчислень практично збіглися. При збільшенні кроку за часом з 0,1 до 0,2 наближені значення безрозмірної температури $\theta_K(X)$ збіглися в ті ж моменти часу незалежно від того, отримані вони з кроком h = 0,1 чи з кроком h = 0,2 /відносне відхилення результатів не перевищує 0,5 %/.

1. С м и р н о в В.И. Курс высшей математики. М., 1981. Т.4. Ч.2. 2. Ч ж о у Ю й - Л и н ь. Краевые задачи для нелинейных параболических уравнений // Матем. сб. 1959. 47 /89/. № 4. С.431-484. 3. Rothe E. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben // Math. Ann. Bd.102. S.650 - 670.

Стаття надійшла до редколегії 19.04.90

УДК 530.145

В.С.Барбуляк, Ю.Г.Кондратьєв

ЗАДАННЯ ГІБСІВСЬКИХ СТАНІВ КВАНТОВИХ ГРАТКОВИХ СИСТЕМ У ТЕРМІНАХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Розглянемо цілочислову гратку $\mathbb{Z}^d=\{\kappa=(\kappa^{(1)},\dots,\kappa^{(d)}), \kappa^{(i)}\in\mathbb{Z}, i=1,\dots,d\}$. З кожним вузлом $\kappa\in\mathbb{Z}^d$ зв"яжемо частинку з одним внутрішнім ступенем вільності. Цій частинці відповідає простір станів $\mathcal{H}_\kappa=L_2(\mathbb{R}^1, dx_\kappa)$ і канонічні оператори імпульсу та координати, що визначаються формулами

$$(p_\kappa f)(x_\kappa)=-i\frac{d}{dx_\kappa}f(x_\kappa),\ (q_\kappa f)(x_\kappa)=x_\kappa f(x_\kappa),$$

самоспряжені в $\mathcal{H}_\kappa$. Скінченній підмножині $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ відповідає простір станів $\mathcal{H}_\Lambda = L_2(\mathbb{R}^\Lambda, dx_\Lambda)(x_\Lambda \in \mathbb{R}^\Lambda = \underset{\kappa\in\Lambda}{X}\mathbb{R}^1)$ і набір операторів імпульсу та координати $\{p_\kappa, q_\kappa, \kappa\in\Lambda\}$. Ними породжена C^* - алгебра спостережуваних $\mathcal{A}_\Lambda$, що збігається з алгеброю всіх обмежених операторів у $L_2(\mathbb{R}^1)$. Можна ввести C^* - алгебру $\mathcal{A}_{loc} = \bigcup\limits_\Lambda \mathcal{A}_\Lambda$ локальних спостережуваних та її поповнення $\mathcal{A}$ - C^*-алгебру квазілокальних спостережуваних для нескінченної системи частинок на $\mathbb{Z}^d$.

Фіксованому $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d, |\Lambda|<\infty$ зіставимо локальний гамільтоніан

$$H_\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{\kappa\in\Lambda} p_\kappa^2 + \sum_{\kappa\in\Lambda} V_\kappa(q_\kappa) + \sum_{\kappa,j\in\Lambda} W_{\kappa j}(q_\kappa, q_j).$$

Вважається, що потенціали V_κ задовольняють умови

$$V_\kappa \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^1); \qquad /1/$$

$$V_\kappa(q) \geq a_\kappa q^2 + b_\kappa,\ a_\kappa, b_\kappa \in \mathbb{R},\ a_\kappa > 0. \qquad /2/$$

При певних припущеннях щодо $W_{\kappa j}$ /які уточнюються для кожної конкретної моделі/ оператор H_Λ істотно самоспряжений в $\mathcal{H}_\Lambda$, а оператор $\exp(-\beta H_\Lambda)$ ядерний.

Гібсівський стан системи в області Λ при оберненій температурі $\beta>0$ визначається як функціонал на $\mathcal{A}_\Lambda$ виду

$$\omega_{\beta,\Lambda}(A) = \frac{Tr(Ae^{-\beta H_\Lambda})}{Tr(e^{-\beta H_\Lambda})},\quad A\in\mathcal{A}_\Lambda. \qquad /3/$$

Гібсівський стан нескінченної системи, що задається формальним гамільтоніаном

$$H_{\mathbb{Z}^d} = \frac{1}{2}\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^d} p_\kappa^2 + \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^d} V_\kappa(q_\kappa) + \sum_{\kappa,j\in\mathbb{Z}^d} W_{\kappa j}(q_\kappa, q_j),$$

визначається як функціонал ω_β на алгебрі $\mathcal{A}_{loc}$, отриманий з /3/ в результаті термодинамічного граничного переходу $\Lambda\to\mathbb{Z}^d$.

Для задання стану ω_β в термінах функціональних інтегралів розглянемо випадок однієї квантової частинки з гамільтоніаном

$$H^0 = -\frac{1}{2}\Delta + V.$$

Нехай S_β - коло довжини β. Можна побудувати [1] міру ν_β^0 на множині всіх траєкторій $S_\beta^{\mathbb{R}} = \{\omega: S_\beta\to\mathbb{R}\}$, а по ній - ймовірнісну міру

$$d\nu_\beta^V(\omega(\cdot)) = \frac{1}{Z} e^{-\int_0^\beta V(\omega(\tau))d\tau} d\nu_\beta^0(\omega(\cdot)).$$

Якщо потенціал $V = V_1 + V_2$, де V_1 задовольняє /1/ і /2/, а V_2 – /1/, то з мультиплікативної формули стандартним чином випливає аналог формули Фейнмана-Каца [2]

$$d\nu_\beta^V(\omega(\cdot)) = \frac{1}{Z} e^{-\int_0^\beta V_2(\omega(\tau))d\tau} d\nu_\beta^{V_1}(\omega(\cdot)). \qquad /4/$$

Якщо ввести простір гельдерових на S_β функцій

$$H_\sigma(S_\beta) = \{\omega \in C(S_\beta) \mid |\omega(s_1) - \omega(s_2)| \leq C_\omega |s_1 - s_2|^\sigma;\ s_1, s_2 \in S_\beta,\ \sigma > 0\}$$

з нормою

$$\|\omega\|_\sigma = \sup_{s_1, s_2 \in S_\beta;\, s_1 \neq s_2} \frac{|\omega(s_1) - \omega(s_2)|}{|s_1 - s_2|^\sigma} + \sup_{s \in S_\beta} |\omega(s)|, \qquad /5/$$

то з /4/ випливає лема 1.

Лема 1. Якщо для потенціалу V виконуються умови /1/, /2/, то $\forall \sigma \in (0, \frac{1}{2})$ $\nu_\beta^V(H_\sigma(S_\beta)) = 1$.

Ця лема дає змогу вибрати як простір станів однієї частинки $\mathcal{S} = H_\sigma(S_\beta)$ з фіксованим $\sigma < 1/2$ і топологією, індукованою з $C(S_\beta)$.

Лема 2. $\forall p > 0$ $D_p = \{\omega \in H_\sigma(S_\beta) \mid \|\omega\|_\sigma < p\}$ – компактна множина в топології, породженій нормою /5/.

Взявши $K = 1, 2, \ldots$, отримаємо $\mathcal{S} = \bigcup_{K=1}^{\infty} D_K$.

Означення 1. Компактна функція – це невід"ємна вимірна функція $h : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^1$ така, що $\forall c > 0$ $\{\omega \in \mathcal{S} \mid h(\omega) \leq c\}$ – компактна множина в $\mathcal{S}$.

Нехай $\mathcal{M}$ – сукупність всіх ймовірнісних мір на $\mathcal{S}$. Справедлива така теорема Прохорова.

Теорема. Множина $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ слабко компактна, якщо існує компактна функція h і стала C такі, що $\forall \mu \in \mathcal{N}$

$$\int_{\mathcal{S}} h(\omega) d\mu(\omega(\cdot)) \leq C < \infty.$$

Множину

$$\Omega_\beta(\Lambda) = \{\omega_\Lambda(\cdot) = (\omega_K(\cdot))_{K \in \Lambda} \mid \omega_\Lambda : S_\beta \to \mathbb{R}^\Lambda,\ \omega_K \in \mathcal{S},\ \Lambda \subset \mathbb{Z}^d\}$$

назвемо множиною конфігурацій в об"ємі Λ. Множину $\Omega_\beta \equiv \Omega_\beta(\mathbb{Z}^d)$ назвемо множиною конфігурацій /у нескінченному об"ємі/.

Для $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ через $G(\Lambda)$ позначимо σ-алгебру підмножин простору Ω_β, породжену циліндричними множинами виду

$$\{\omega \in \Omega_\beta \mid \omega_k \in C_k,\ C_k \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}),\ k \in \Lambda_1 \subset \Lambda,\ |\Lambda_1| < \infty\};$$

σ - алгебру $G(\mathbb{Z}^d)$ позначимо G.

Нехай $\mathcal{P}$ - сукупність усіх ймовірнісних мір на (Ω_β, G) . З теореми випливає, що множина $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$ слабко компактна, якщо $\forall t \in \mathbb{Z}^d$, існує компактна функція h_t і стала C_t такі, що $\forall \nu \in \mathcal{X}$

$$\int_{\Omega_\beta} h_t(\omega_t)\, d\nu(\omega(\cdot)) \le C_t < \infty . \qquad /6/$$

Нехай для $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ задано функцію $W_A(x) = W_A(x_A) \in \mathbb{R}^1,\ x_A = \{x_k, k \in A\}$. Визначимо функцію $W_A(\omega(\cdot))$ наступним чином:

$$W_A(\omega(\cdot)) = \int_\beta W_A(\omega(\tau))\, d\tau .$$

Набір функцій $W^0 = \{W_A(\omega(\cdot)), A \subset \mathbb{Z}^d, A \ne \emptyset, |A| < \infty\}$ назвемо взаємодією.

<u>Означення 2.</u> Формальним потенціалом взаємодії називається вираз

$$E(\omega(\cdot)) = \sum_{\substack{A \subset \mathbb{Z}^d \\ 1 < |A| < \infty}} W_A(\omega(\cdot)) .$$

Розглянемо об"єм $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty$, конфігурацію $\omega_\Lambda \in \Omega_\beta(\Lambda)$ і фіксовану конфігурацію $\bar{\omega} \in \Omega_\beta$.

<u>Означення 3</u>. Відносним потенціалом взаємодії називається вираз

$$E_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot) \mid \bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot)) = \sum_{\substack{A \subset \mathbb{Z}^d \\ 1 < |A| < \infty;\, A \cap \Lambda \ne \emptyset}} W_A((\omega_\Lambda \cup \bar{\omega}_{\Lambda^c})(\cdot)) .$$

Тут $\Lambda^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$, $\omega_\Lambda \cup \bar{\omega}_{\Lambda^c}$ - це конфігурація з Ω_β така, що

$$(\omega_\Lambda \cup \bar{\omega}_{\Lambda^c})\big|_\Lambda = \omega_\Lambda ,\quad (\omega_\Lambda \cup \bar{\omega}_{\Lambda^c})\big|_{\Lambda^c} = \bar{\omega}_{\Lambda^c} = \bar{\omega}\big|_{\Lambda^c} .$$

Розглянемо випадок, коли $\forall k \in \mathbb{Z}^d\ V_k = V$. Позначимо для $k \in \mathbb{Z}^d$

$$d\nu_{0,\Lambda}(\omega(\cdot)) = \mathop{\times}_{k \in \Lambda} d\nu_0^{V_k}(\omega_k(\cdot)) \text{ і } d\nu_0(\omega(\cdot)) = \mathop{\times}_{k \in \mathbb{Z}^d} d\nu_0^{V_k}(\omega_k(\cdot)) .$$

Побудуємо ймовірнісні міри

а/ на $(\Omega_\beta(\Lambda), G(\Lambda))$ при фіксованій граничній умові $\bar{\omega} \in \Omega_\beta$

$$d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot) \mid \bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot)) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-E_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot) \mid \bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot))}\, d\nu_{0,\Lambda}(\omega(\cdot)) ; \qquad /7/$$

б/ на $(\Omega_\beta, \mathcal{B})$

$$d\nu(\omega(\cdot)) = \frac{1}{Z} e^{-E(\omega(\cdot))} d\nu_0(\omega(\cdot)) , \qquad /8/$$

де Z_Λ, Z – нормуючі множники. Зображення /8/ носить формальний характер. Існування міри /8/ [1] еквівалентне існуванню гіббсівського стану системи, що відповідає гамільтоніану

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z^d} p_k^2 + E(\omega(\cdot)) + \sum_{k \in Z^d} V(q_k) . \qquad /9/$$

Доведення збіжності мір виду /7/ до міри виду /8/ при термодинамічному граничному переході $\Lambda \to Z^d$ – досить складне завдання. Воно здійснюється з використанням різноманітних технічних прийомів, вибір яких залежить від конкретного класу розглядуваних моделей.

1. Глоба С.А., Кондратьев Ю.Г. Построение гиббсовских состояний квантовых решеточных систем // Применение методов функционального анализа в задачах математической физики. К., 1987. С.4-16. 2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1978. Т.2.

Стаття надійшла до редколегії 04.06.90

УДК 530.145

В.С.Барбуляк, Ю.Г.Кондратьев

КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ ГІБСІВСЬКИХ СТАНІВ КВАНТОВИХ ГРАТКОВИХ СИСТЕМ

У праці [1] побудовано ймовірнісні міри

$$d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot) | \bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot)) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-E_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar{\omega}_{\Lambda^c}(\cdot))} d\nu_{0,\Lambda}(\omega(\cdot)) \qquad /1/$$

на вимірному просторі $(\Omega_\beta(\Lambda), \mathcal{B}(\Lambda))$ при фіксованій граничній умові $\bar{\omega} \in \Omega_\beta$ та

$$d\nu(\omega(\cdot)) = \frac{1}{Z} e^{-E(\omega(\cdot))} d\nu_0(\omega(\cdot)) \qquad /2/$$

на вимірному просторі $(\Omega_\beta, \mathcal{B})$. Існування міри /2/ еквівалентне існуванню гібсівського стану системи, що відповідає гамільтоніану

$$H=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} p_k^2+E(\omega(\cdot))+\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} V(q_k)\,. \qquad /3/$$

Наступна теорема, що узагальнює на квантовий випадок відому в класичному випадку теорему Добрушина [2], є критерієм існування гібсівських станів у нескінченному об"ємі.

<u>Теорема.</u> Нехай для гамільтоніана /3/ знайдуться:

а/ компактна функція h ;

б/ числа c_{jl} , $j,l\in\mathbb{Z}^d$ і стала $c, 0<c<1$, для яких

$$\forall j \sum_l |c_{jl}|\le c\,;$$

в/ число $K>0$

такі, що

$\forall\Lambda, \Lambda\subset\mathbb{Z}^d, |\Lambda|<\infty$ і граничної умови $\bar\omega\in\Omega_\beta$, для якої

$$\max_{j\in\Lambda}\sum_{l\in\Lambda^c}|c_{jl}|h(\bar\omega_l)<\infty,$$

міра $d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar\omega_{\Lambda^c}(\cdot))$ існує і

$$\int h(\omega_j)\,d\nu_\Lambda(\omega_\Lambda(\cdot)|\bar\omega_{\Lambda^c}(\cdot))\le K+\sum_{l\ne j}c_{jl}h(\omega_l)\,. \qquad /4/$$

Тоді сім"я мір $\left\{\nu_\Lambda(\omega_\Lambda|\bar\omega_{\Lambda^c}), \Lambda\subset\mathbb{Z}^d, |\Lambda|<\infty\right\}$ слабко компактна.

Нехай, крім того, $\forall j\in\mathbb{Z}^d$ $\forall a$ – неперервної обмеженої функції на $\mathcal{Y}$ [1] знайдуться:

а/ послідовність множин $M_n\subset\mathbb{Z}^d, |M_n|<\infty, \bigcup_n M_n=\mathbb{Z}^d\setminus\{j\}$;

б/ числа $d_{jl}^{(n)}\ge 0$, $j\ne l$, для яких

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} d_{jl}^{(n)}\le D^{(n)},\quad D^{(n)}\to 0 \quad \text{при } n\to\infty\,;$$

в/ послідовність неперервних обмежених функцій $f_n(\omega_{M_n})$

такі, що для будь-якої граничної умови $\bar\omega\in\Omega_\beta$, для якої

$$\sum_{l\ne j}|c_{jl}|h(\bar\omega_l)<\infty,$$

справедлива оцінка

$$\left|\int a(\omega_j)\,d\nu_j(\omega_j(\cdot)|\bar\omega_{\mathbb{Z}^d\setminus\{j\}}(\cdot))-f_n(\omega_{M_n})\right|\le D^{(n)}+\sum_{l\ne j}d_{jl}^{(n)}h(\omega_l). \qquad /5/$$

Тоді існує хоча б одна міра $d\bar{\nu}(\omega(\cdot))$, яка відповідає гамільтоніану /3/ в тому розумінні, що її умовні розподіли задаються /1/.

Доведення. Фіксуємо зростаючу послідовність множин $\Lambda_n, \Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda_n| < \infty$ і граничних умов $\bar{\omega}_{\Lambda_n^c}$ таких, що $\forall l \in \Lambda_n^c \, h(\bar{\omega}_l) \leq A$ для деякої сталої A. Послідовність ймовірнісних мір ν_n на Ω_β побудуємо наступним чином:

$\nu_n(\bar{\omega}_{\Lambda_n^c}) = 1, \; d\nu_n = d\nu_{\Lambda_n}(\omega(\cdot) \mid \bar{\omega}_{\Lambda_n^c}(\cdot))$ [див.: 1, вираз /7/].

Лема 1. $\forall j$

$$\sup_n \int h(\omega_j) d\nu_n \leq \frac{K + cA}{1 - c} \equiv K_0 .$$

Доведення. Оскільки $\forall n \;\; \Omega_\beta(\Lambda_n)$ – сепарабельний метричний простір, то міра ν_n є щільною, тобто $\forall \varepsilon \, \exists K_\varepsilon^n \subset \subset \Omega_\beta(\Lambda_n) \, \nu_n(K_\varepsilon^n) \geq 1 - \varepsilon$. Тоді

$$\int h(\omega_j) d\nu_n = \int_{K_\varepsilon^n} h(\omega_j) d\nu_n + \int_{\Omega_\beta(\Lambda_n) \setminus K_\varepsilon^n} h(\omega_j) d\nu_n .$$

Із абсолютної неперервності інтеграла випливає, що $\forall \eta \, \exists K_\varepsilon^n$

$$\int_{\Omega_\beta(\Lambda_n) \setminus K_\varepsilon^n} h(\omega_j) d\nu_n < \eta .$$

З теореми Лузіна випливає існування неперервної функції $h^c(\omega_j)$ на $K_\varepsilon^n(j) = K_\varepsilon^n \big|_{\Omega_\beta(\{j\})}$ такої, що міра множини $\{\omega_j \mid h(\omega_j) \neq h^c(\omega_j)\}$ є меншою від довільного додатного числа. На $K_\varepsilon^n(j)$ функція $h^c(\omega_j)$ досягає своєї верхньої межі, тому $\forall \varepsilon \, \forall n$

$$\int_{K_\varepsilon^n} h(\bar{\omega}_j) d\nu_n$$

скінченний. Зафіксуємо числа ε і n. Тоді

$$\max_{j \in \Lambda_n} \int h(\omega_j) d\nu_n = A_\varepsilon^n < \infty .$$

Вибравши j, при якому досягається максимум, прийнявши в /4/ $\Lambda = \{j\}$ і проінтегрувавши це співвідношення за мірою ν_n, отримаємо

$$A_\varepsilon^n \leq K + A_\varepsilon^n c + cA .$$

Отже,

$$\sup_n \sup_\varepsilon A_\varepsilon^n \leq \frac{K + cA}{1 - c} ,$$

звідки і випливає твердження леми.

З леми 1 і співвідношення /6/ праці [1] випливає, що ν_n – слабко компактна послідовність. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що до деякої граничної міри $\bar{\nu}$ збігається сама послідовність ν_n.

Лема 2. Нехай f – невід"ємна, півнеперервна знизу функція на метричному просторі X і послідовність ймовірнісних мір μ_n на X слабко збігається до деякої міри μ. Крім того, $\forall n$

$$\int f d\mu_n \leqslant C.$$

Тоді

$$\varliminf_{n\to\infty} \int f d\mu_n \geqslant \int f d\mu.$$

Доведення. Для довільної міри χ, такої, що

$$\int f d\chi \leqslant C,$$

справедлива оцінка

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{i-1}{K}+l\right) \chi\left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{K}+l< f(x) \leqslant \frac{i}{K}+l\right\} \leqslant \int f d\chi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{i}{K}+l\right) \chi\left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{K}+l< f(x) \leqslant \frac{i}{K}+l\right\}, \; x \in X.$$

Позначимо $G_i^l = \left\{x \mid f(x) > \frac{i}{K}+l\right\}$. Тоді, зробивши очевидні перетворення і скориставшись скінченністю інтеграла функції f за мірою χ, отримаємо, що

$$\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K} \chi(G_i^l) \leqslant \int f d\chi \leqslant \frac{1}{K} + \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K} \chi(G_i^l).$$

Виписавши ланцюжок нерівностей

$$\varliminf_{n\to\infty} \int f d\mu_n \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K} \mu_n(G_i^l) \geqslant \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K} \varliminf_{n\to\infty} \mu_n(G_i^l) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{K} \mu(G_i^l) \geqslant -\frac{1}{K} + \int f d\mu$$

і перейшовши до границі при $K \to \infty$, отримаємо твердження леми.

З лем 1 і 2 випливає, що

$$\int h(\omega_j) d\bar{\nu} \leqslant K_0 .$$

Граничний розподіл $\bar{\nu}$ відповідає гамільтоніану /3/, якщо для довільних вимірних $a(\omega_K), b(\omega_\Lambda)$

$$\int a(\omega_K) b(\omega_\Lambda) d\bar{\nu} = \int b(\omega_\Lambda) d\bar{\nu} \int a(\omega_K) d\nu_K(\omega_K(\cdot) | \bar{\omega}_{Z^d \setminus \{K\}}(\cdot)). \qquad /6/$$

Оскільки міра однозначно відновлюється при заданні її значень на неперервних обмежених функціях, то /6/ досить довести для $a(\omega_K)$, $b(\omega_\Lambda)$, неперервних і обмежених.

Для досить великих n, таких, що $\Lambda \subset \Lambda_n$, справедлива рівність

$$\int a(\omega_K) b(\omega_\Lambda) d\nu_n = \int b(\omega_\Lambda) d\nu_n \int a(\omega_K) d\nu_K (\omega_K(\cdot) | (\bar{\omega}_{\Lambda_n \setminus \{K\}} \cup \bar{\omega}_{\Lambda_n^c})(\cdot)). \quad /7/$$

За означенням слабкої збіжності ліва частина /7/ при $n \to \infty$ прямує до лівої частини /6/. З /5/ випливають оцінки зверху і знизу для внутрішнього інтеграла у правій частині /7/. Підставивши ці оцінки в /7/ і використавши лему 1, отримаємо /6/. Теорема доведена.

1. Барбуляк В.С., Кондратьєв Ю.Г. Задання гібсівських станів квантових граткових систем в термінах функціональних інтегралів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 36. 2. Добрушин Р.Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений // Теория вероятностей и ее применения. 1970. Т.15. Вып. 3. С.469-497.

Стаття надійшла до редколегії 04.06.90

УДК 539.3

Р.Д.Кульчицький-Жигайло

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

У реальних матеріалах, як правило, існують напруження і деформації ще до моменту прикладання до них зовнішніх зусиль, внаслідок чого дослідженню напружено-деформованого стану тіл з початковими напруженнями приділяється багато уваги [1, 2]. В публікації [1] дана постановка задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями у випадку пружних потенціалів довільної форми. У нашій статті на основі алгоритму, запропонованому в [1], отримані лінеаризовані співвідношення термопружності для тіл з початковими напруженнями.

1. Рух тіла розглядаємо відносно декартової системи координат $\xi_1 \xi_2 \xi_3$. Закон руху задаємо співвідношеннями

$$X_i = X_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1,2,3. \qquad /1.1/$$

Тут $\xi_i \ (i = 1,2,3)$ – лагранжеві координати; $X_i \ (i = 1,2,3)$ – ейлерові координати точок тіла. Якщо $\vec{u}$ – вектор пружного переміщення з компонентами $u_\kappa \ (\kappa = 1,2,3)$, то закон руху можна записати як

$$X_\kappa = \xi_\kappa + u_\kappa(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t). \qquad /1.2/$$

Основні співвідношення нелінійної термопружності для даного тіла мають вигляд [3, 5]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_\kappa \partial_j u_\kappa); \qquad /1.3/$$

$$\rho \dot{v}_i = \partial_{x_\kappa} \sigma_{i\kappa}; \qquad /1.4/$$

$$\rho c_F \dot{T} = T \partial_T \sigma_{i\kappa} \partial_{x_\kappa} v_i - \partial_{x_\kappa} q_\kappa; \qquad /1.5/$$

$$\sigma_{i\kappa} = \rho \partial_{\varepsilon_{i\kappa}} F^* |_T, \ \eta = -\partial_T F^* |_{\varepsilon_{ij}}, \ \rho = \rho_0 \det \| \partial_j X_i \|. \qquad /1.6/$$

У співвідношеннях /1.3/–/1.6/ введені такі позначення: $F^* = U - T\eta$ – густина вільної енергії, віднесена до одиниці маси; U – густина внутрішньої енергії; η – густина ентропії; T – температура; $c_F = T\partial_T \eta$ – теплоємність при постійній деформації; ρ, ρ_0 – густина матеріалу в актуальному і початковому станах; ε_{ij} – компоненти тензора деформації Гріна $\hat{\varepsilon}$; σ_{ij} – компоненти тензора напружень Коші; $\vec{q}$ – вектор теплового потоку; $\vec{v}$ – вектор швидкості матеріальної частинки, $\partial_j = \partial_{\xi_j}$.

Будемо припускати, що для вектора теплового потоку справедливий закон теплопровідності Фур'є

$$q_i = \varkappa_i(\hat{\varepsilon}) \partial_{x_i} T, \qquad /1.7/$$

де $\varkappa_i$ – коефіцієнти теплопровідності. Надалі розглядатимемо тільки такі процеси, які повільно змінюються в часі, а тому похідними по часу і компонентами вектора швидкості в подальших викладках будемо нехтувати.

Відзначимо, що у співвідношеннях /1.4/-/1.7/ диференціювання ведеться за ейлеровими змінними X_k, які, згідно з /1.2/, залежні від невідомих компонент вектора пружного переміщення. Для уникнення труднощів, зумовлених диференціюванням за залежними параметрами, зручно перейти у даних рівняннях від змінних X_k до змінних ξ_l, які є незмінними в процесі руху. Після обчислень, використовуючи [1, 4], прийдемо до співвідношень

$$\partial_j \pi_{ij} = 0; \qquad /1.8/$$

$$\pi_{ij} = S_{kj}(\delta_{ik} + \partial_k u_i), \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_{\varepsilon_{ij}} + \partial_{\varepsilon_{ji}})F; \qquad /1.9/$$

$$g^{ik}\{\varkappa_i(\hat{\varepsilon})[\partial^2_{ik}T - \Gamma^j_{ik}\partial_j T] + \partial_{\varepsilon_{ml}}\varkappa_k(\hat{\varepsilon})\,\partial_i \varepsilon_{ml}\,\partial_k T\} = 0. \qquad /1.10/$$

У /1.8/-/1.10/ $F = \rho_0 F^*$ – густина вільної енергії, віднесена до одиниці об"єму в недеформованому стані; π_{ij} – компоненти тензора напружень Піоле-Кірхгофа; S_{ij} – компоненти тензора узагальнених напружень [1]; g^{ik}, Γ^j_{ik} – відповідно контраваріантні компоненти метричного тензора і символи Крістофеля другого роду для актуальної [5] лагранжевої системи координат.

2. Будемо розглядати три стани тіла: природний стан, в якому напруження і деформації дорівнюють нулеві, початковий, який характеризується наявністю в тілі напружень і деформацій, і збурений стан. Величини, які описують збурений стан тіла, подамо у вигляді

$$f_i' = f_i^0 + f_i. \qquad /2.1/$$

У /2.1/ f_i' – характеристики збуреного стану тіла; f_i^0 – характеристики початкового стану; f_i – збурення. Припускаємо, що збурення набагато менше від відповідних величин початкового напружено-деформованого стану, тобто приймаємо $|f_i| \ll |f_i^0|$. Дане припущення дає змогу лінеаризувати рівняння термопружності /1.3/, /1.8/-/1.10/ і стосовно збурень отримати лінійні рівняння. Використовуючи алгоритм лінеаризації, запропонований О.М.Гузем, прийдемо до співвідношень

$$2\varepsilon_{ij} = [(\delta_{kj} + \partial_j u_k^0)\partial_i + (\delta_{ki} + \partial_i u_k^0)\partial_j]u_k; \qquad /2.2/$$

$$\partial_j \pi_{ij} = 0; \qquad /2.3/$$

$$\mathcal{T}_{ij} = \omega_{ijkl}\,\partial_l u_k + \gamma_{ij}\,\alpha T; \qquad /2.4/$$

$$g_0^{ik}\left\{\varkappa_i(\hat{\varepsilon}^0)\left[\partial^2_{ik}T - \partial_j T\,\Gamma^{j,0}_{ik}\right] + \partial_{\varepsilon^0_{ml}}\varkappa_k(\hat{\varepsilon}^0)\,\partial_i \varepsilon^0_{ml}\,\partial_k T\right\} = 0, \qquad /2.5/$$

де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення

$$\omega_{ijkl} = \frac{1}{4}(\delta_{nj} + \partial_n u^0_j)(\delta_{mk} + \partial_m u^0_k)(\partial_{\varepsilon^0_{ml}} + \partial_{\varepsilon^0_{lm}})(\partial_{\varepsilon^0_{in}} + \partial_{\varepsilon^0_{ni}})F + \delta_{jk} S^0_{il}; \qquad /2.6/$$

$$S^0_{il} = \frac{1}{2}(\partial_{\varepsilon^0_{il}} + \partial_{\varepsilon^0_{li}})F^0; \qquad /2.7/$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{nj} + \partial_n u^0_j)(\partial_{\varepsilon^0_{in}} + \partial_{\varepsilon^0_{ni}})F^0_1, \quad F^0_1 = \partial_{(\alpha T)} F \Big|_{\substack{\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^0 \\ \alpha T = 0}} . \qquad /2.8/$$

Зауважимо, що у випадку ізотермічного процесу $(T = const)$ співвідношення /2.2/–/2.4/, /2.6/, /2.7/ перейдуть у відповідні співвідношення, отримані у працях О.М.Гузя.

3. Розглянемо ізотропні тіла. Функцію вільної енергії $F(\hat{\varepsilon}, \alpha T)$ у цьому випадку можна розглядати як функцію трьох довільних незалежних інваріантів тензора деформації Гріна і температури. Надалі будемо розглядати такі дві системи інваріантів:

алгебраїчні інваріанти

$$A_1 = \varepsilon_{ii}\,, \quad A_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}\,, \quad A_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki} \qquad /3.1/$$

та інваріанти

$$S_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3\,; \quad S_2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2\,; \quad S_3 = \delta_1^3 + \delta_2^3 + \delta_3^3\,, \qquad /3.2/$$

де $\delta_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i} - 1$; ε_i – головні значення тензора деформації Гріна.

Допустимо, що початковий напружено-деформований стан у тілі є однорідним і визначається співвідношеннями

$$u_m = \delta_{mi}(\lambda_i - 1)\varepsilon_i\,; \quad 2\varepsilon^0_{ij} = \delta_{ij}(\lambda^2_j - 1) = 2\delta_{ij}\,\varepsilon^0_i\,. \qquad /3.3/$$

Враховуючи /3.3/, співвідношення /2.2/, /2.5/–/2.8/ після обчислень зводимо до вигляду

$$2\varepsilon_{ij} = \lambda_i\partial_j u_i + \lambda_j\partial_i u_j\,; \qquad /3.4/$$

$$\omega_{ijkl} = \lambda_j\lambda_k\left[\delta_{ij}\delta_{kl}A_{il} + (\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{li}\delta_{jk})(1 - \delta_{ij})\mu_{ij}\right] + \delta_{jk}\delta_{il}S^0_{ii}; \qquad /3.5/$$

$$\gamma_{ij} = \lambda_j \delta_{ij} \Sigma_{ii} F_1^0 = \gamma_i \delta_{ij} ; \qquad /3.6/$$

$$A_{il} = [\Sigma_{ii} \Sigma_{ll} + 2\delta_{il} B_{ii}] F^0; \ \mu_{ij} = B_{ij} F; \ S_{ii}^0 = \Sigma_{ii} F^0; \qquad /3.7/$$

$$\Sigma_{ii} = \partial_{A_1^0} + 2\varepsilon_{ii}^0 \partial_{A_2^0} + 3\varepsilon_{ii}^{0\,2} \partial_{A_3^0} ; \ B_{ij} = \partial_{A_2^0} + \frac{3}{2}(\varepsilon_{ii}^0 + \varepsilon_{jj}^0) \partial_{A_3^0} ; \qquad /3.8/$$

$$\varkappa_1(\hat{\varepsilon}^0)\lambda_1^{-2}\partial_1^2 T_1 + \varkappa_2(\hat{\varepsilon}^0)\lambda_2^{-2}\partial_2^2 T + \varkappa_3(\hat{\varepsilon}^0)\lambda_3^{-2}\partial_3^2 T = 0. \qquad /3.9/$$

Співвідношення /2.3/, /2.4/ залишаються без змін.

Зауважимо, що /3.7/, /3.8/ зручно користуватись у випадку, коли функція вільної енергії задана як функція алгебраїчних інваріантів тензора деформації Гріна. Якщо функція вільної енергії є функцією інваріантів /3.2/, то від співвідношень /3.7/, /3.8/ можна перейти [1] до виразів

$$A_{il} = \partial^2_{\varepsilon_i^0 \varepsilon_l^0} F, \ \mu_{ij} = \frac{(\partial_{\varepsilon_i^0} - \partial_{\varepsilon_j^0})F^0}{2(\varepsilon_i^0 - \varepsilon_j^0)}, \ \Sigma_{ii} = \partial_{\varepsilon_i^0} . \qquad /3.10/$$

4. Поряд з лагранжевими координатами ξ_j введемо декартові координати y_j початкового стану. Зв"язок між координатами ξ_j і y_j подамо у вигляді

$$y_j = \lambda_j \xi_j . \qquad /4.1/$$

Запишемо всі співвідношення лінеаризованої термопружності для тіл з початковими напруженнями в координатах y_j, причому всі величини віднесемо до розмірів площадок у початковому стані. Для цього позначимо через Q_{ij} складові вздовж осі Oy_j вектора напружень на площадці $y_i = const$, які вимірюються на одиницю площі в початковому стані. Між величинами Q_{ij} і компонентами тензора напружень Піоле-Кірхгофа існує зв"язок [1]

$$Q_{ij} = \lambda_i (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \pi_{ij} . \qquad /4.2/$$

Якщо тепер подати

$$Q_{ij} = \widetilde{\omega}_{ijkl} u_{k,l} + \widetilde{\gamma}_i \delta_{ij} \alpha T , \qquad /4.3/$$

то отримаємо

$$\widetilde{\omega}_{ijkl} = \lambda_l \lambda_l (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \omega_{ijkl} , \ \widetilde{\gamma}_i = \lambda_i (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \gamma_i .$$

У співвідношенні /4.3/ введено позначення $\partial_{y_i} f = f_{,i}$.

Рівняння рівноваги /2.3/ і рівняння теплопровідності при переході до координат y_i набудуть вигляду

$$Q_{ij,i} = 0; \qquad /4.4/$$

$$\varkappa_1(\hat{\varepsilon}^0)T_{,11} + \varkappa_2(\hat{\varepsilon}^0)T_{,22} + \varkappa_3(\hat{\varepsilon}^0)T_{,33} = 0. \qquad /4.5/$$

Підставивши /4.3/ у /4.4/, отримаємо рівняння рівноваги пружного середовища в переміщеннях

$$\tilde{\omega}_{ijkl}\, u_{k,li} + \tilde{\gamma}_i \delta_{ij} \alpha T_{,i} = 0. \qquad /4.6/$$

Поряд з вихідною системою диференціальних рівнянь термопружності для тіл з початковими напруженнями сформулюємо також крайові умови. Якщо на деякій частині поверхні S_1 задані зусилля і потік тепла, а на іншій S_2 — переміщення і температура, то відповідні вирази матимуть вигляд

$$N_i^0 Q_{ij}\big|_{S_1} = P_j, \quad N_i^0 \varkappa_i(\hat{\varepsilon}^0) T_{,i}\big|_{S_1} = G; \qquad /4.7/$$

$$u_j\big|_{S_2} = f_j, \qquad T\big|_{S_2} = T_0. \qquad /4.8/$$

У /4.7/ величини P_j і G віднесені до одиниці поверхні тіла в початковому стані.

Співвідношення /4.5/–/4.8/ служать теоретичною основою для постановки відомих задач термопружності для тіл з початковими напруженнями.

1. Б а б и ч С.Ю., Г у з ь А.Н., Р у д н и ц к и й В.В. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями /жесткие штампы/ // Прикл. механика. 1989. 25б. № 8. С.3-18. 2. Г у з ь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. К., 1983. 3. К о н д а у р о в В.И. О законах сохранения и симметризации уравнений нелинейной теории термоупругости // Докл. АН СССР. 1982. 256. № 4. С.819-823. 4. Н о в о ж и л о в В.В. Основы нелинейной упругости. М., 1948. 5. С е д о в Л.И. Механика сплошной среды. М., 1976. Т.2.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90

УДК 539.3

Л.О.Тисовський

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ І ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ПЛОСКІЙ ДЕФОРМАЦІЇ БАГАТОШАРОВОГО СУЦІЛЬНОГО ЦИЛІНДРА

Розглядається суцільний пружний багатошаровий необмежений циліндр. Матеріал кожного шару вважається однорідним, ізотропним і характеризується своїми пружними сталими λ_i, μ_i і коефіцієнтом лінійного розширення $\alpha_i \; (i = 1, \ldots, N)$.

Вважаємо, що поверхневі та об"ємні сили на циліндр не діють, а на лініях розділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного і теплового контакту. Напружено-деформований стан у композиті виникає в результаті його стаціонарного нагріву з нульової початкової до деякої температури T. Припустимо поки що, що температура у довільній точці циліндра - відома функція радіальної координати.

При зроблених припущеннях потрібно визначити поле температурних переміщень і напружень у тілі.

Введемо в розгляд циліндричну систему координат r, θ, z. Оскільки температура залежить лише від радіальної координати, то віддалені від торців циліндра перерізи, ортогональні осі залишаються плоскими, тобто має місце плоский деформований стан.

Запишемо повну систему рівнянь термопружності для осесиметричної плоскої деформації. У цьому випадку відмінні від нуля переміщення u, деформації $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ напруження $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ пов"язані між собою системою диференціальних залежностей*

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d(ru)}{dr}\right] = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\,\alpha\,\frac{dT}{dr}, \qquad /1/$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r};$$

$$\sigma_r = 2\mu\varepsilon_r + \lambda e - \gamma T;$$

$$\sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda e - \gamma T;$$

$$\sigma_z = \lambda e - \gamma T. \qquad /2/$$

* М е л а н Э., П а р к у с Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М., 1958.

Тут $e = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r}$ – об"ємне розширення, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$. Відзначимо, що отриманий розв"язок повинен задовольняти крайові умови

$$\sigma_r^i\Big|_{r=R_i} = \sigma_r^{i+1}\Big|_{r=R_i} \equiv p_i\,, \quad i=1,\dots,N-1;\ \sigma_r^N\Big|_{r=R_N} = 0\,,$$

$$u^i\Big|_{r=R_i} = u^{i+1}\Big|_{r=R_i}\,, \quad i=1,\dots,N-1\,, \qquad /3/$$

які являють собою умови ідеального механічного контакту на лінії розділу матеріалів і умову незавантаженості бічної поверхні циліндра. Тут і надалі індексом "i" позначено номер шару, $p_i\ (i=1,\dots,N-1)$ – невідомі величини, які вводимо для зручності.

Дотримуючись відомого підходу, розв"язок задачі для багатошарового циліндра представимо у вигляді пакета розв"язків для кожного шару, спряжених між собою крайовими умовами /3/.

Перейшовши від пружних постійних Ляме λ, μ до модуля Юнга Е і коефіцієнта Пуассона ν, пов"язаних між собою співвідношеннями

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\,,$$

а також використавши співвідношення /1/, /2/, можемо знайти вирази для компонент поля переміщень і напружень всередині i -го шару $(i=1,\dots,N)$

$$u^i(r) = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\,\frac{\alpha_i}{r}\int\limits_{R_{i-1}}^{r} T_i(r)\,r\,dr + A_i r + \frac{B_i}{r}\,;$$

$$\sigma_r^i(r) = -\frac{1}{1-\nu_i}\,\frac{\alpha_i E_i}{r^2}\int\limits_{R_{i-1}}^{r} T_i(r)\,r\,dr + \frac{E_i A_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} - \frac{E_i}{1+\nu_i}\,\frac{B}{r^2}\,;$$

$$\sigma_\theta^i(r) = \frac{1}{1-\nu_i}\,\frac{\alpha_i E_i}{r^2}\int\limits_{R_{i-1}}^{r} T_i(r)\,r\,dr - \frac{\alpha_i E_i T_i(r)}{1-\nu_i} + \frac{E_i A_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} + \frac{E_i}{1+\nu_i}\,\frac{B_i}{r^2}\,;$$

$$\sigma_z^i(r) = -\frac{\alpha_i E_i T_i(r)}{1-\nu_i} + \frac{2\nu_i E_i A_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}\,; \quad R_0 = 0\,. \qquad /4/$$

Постійні інтегрування A_i, B_i знайдемо з крайових умов

$$\sigma_r^i\Big|_{r=R_{i-1}} = p_{i-1}; \quad \sigma_r^i\Big|_{r=R_i} = p_i; \quad i=1,\dots,N. \qquad /5/$$

В результаті отримаємо

$$A_1 = \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\,\frac{1-2\nu_1}{R_1^2}\,\alpha_1\int_0^{R_1} T_1(r)\,r\,dr + \frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{E_1}\,p_1; \quad B_1 = 0;$$

$$A_i = \alpha_i\frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{1-\nu_i}\,\frac{1}{R_i^2-R_{i-1}^2}\int_{R_{i-1}}^{R_i} T_i(r)\,r\,dr + \frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{E_i}\,\frac{p_iR_i^2-p_{i-1}R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2};$$

$$B_i = \alpha_i\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\,\frac{R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}\int_{R_{i-1}}^{R_i} T_i(r)\,r\,dr + \frac{1+\nu_i}{E_i}\,\frac{R_i^2R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}\,(p_i-p_{i-1}). \qquad /6/$$

$$(i=2,\dots,N)$$

Невідомі контактні зусилля на лініях розділу матеріалів $p_0=p_N=0$, $p_i\ (i=1,\dots,N-1)$ визначаються з умов неперервності переміщень, які на лінії розділу матеріалів i та $i+1$ шару можна представити у вигляді

$$a_ip_{i-1} + b_ip_i + c_i = d_i \quad (i=1,\dots,N-1), \qquad /7/$$

де

$$a_i = -\frac{1+\nu_i}{E_i}\,\frac{2(1-\nu_i)R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}; \quad c_i = -\frac{1+\nu_{i+1}}{E_{i+1}}\,\frac{2(1-\nu_{i+1})R_{i+1}^2}{R_{i+1}^2-R_i^2};$$

$$b_i = \frac{1+\nu_i}{E_i}\,\frac{(1-2\nu_i)R_i^2+R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2} + \frac{1+\nu_{i+1}}{E_{i+1}}\,\frac{(1-2\nu_{i+1})R_i^2+R_{i+1}^2}{R_{i+1}^2-R_i^2};$$

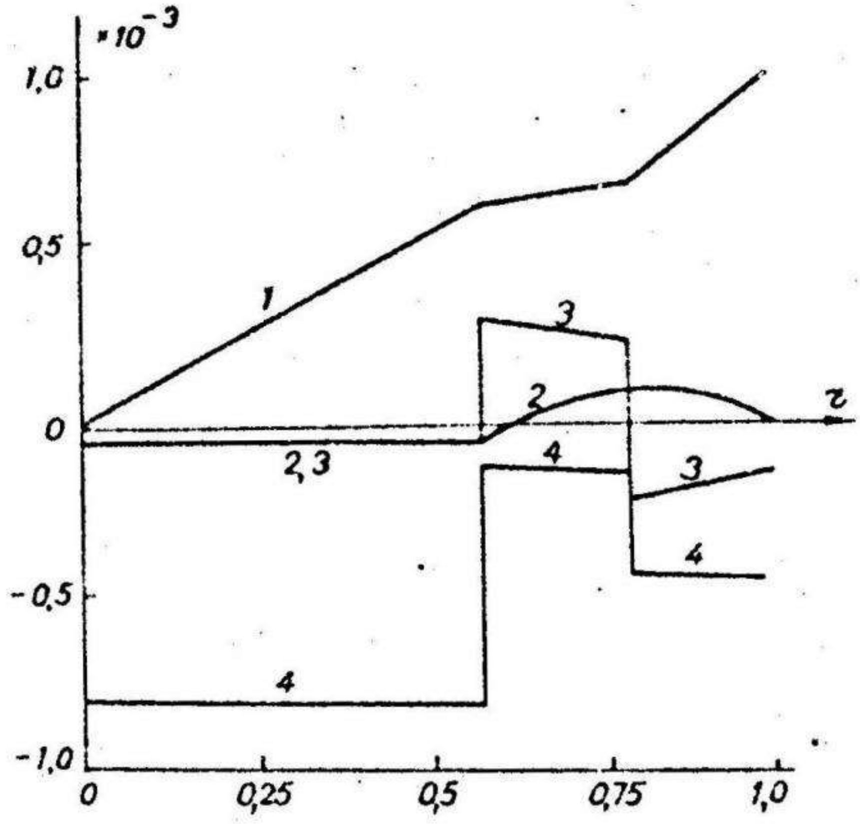
$$d_i = \frac{2\alpha_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{R_{i+1}^2-R_i^2}\int_{R_i}^{R_{i+1}} T_{i+1}(r)\,r\,dr - \frac{2\alpha_i(1+\nu_i)}{R_i^2-R_{i-1}^2}\int_{R_{i-1}}^{R_i} T_i(r)\,r\,dr. \qquad /8/$$

При зміні i від 1 до $N-1$ з /7/ отримуємо тридіагональну систему $N-1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з такою ж кількістю невідомих. Визначивши з неї зусилля $p_i\ (i=1,\dots,N-1)$, ми тим самим співвідношеннями /6/, /4/ встановлюємо закон розподілу температурних переміщень і напружень у довільній точці багатошарового циліндра.

До цих пір припускалося, що температура $T=T(r)$ – відома функція. Якщо ж температура в шаруватому циліндрі наперед не відома, то її слід знаходити з рівняння Лапласа в кожному шарі:

$$\Delta T_i \equiv \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dT_i(r)}{dr}\right)=0. \qquad /9/$$

Тут $T_i(r)\ (i=1,\dots,N)$ – температура в i-му шарі.



Розв"язок цього рівняння в круговому кільці має вигляд

$$T_i(r)=C_i\ \ln r+D_i\ . \qquad /10/$$

Для визначення постійних інтегрування C_i, D_i слід використати крайові умови та умови ідеального теплового контакту на лінії розділу матеріалів. Так, зокрема, якщо на вільній поверхні циліндра задана постійна температура T_0, то, використавши розв"язок /10/, отримаємо

$$T_i(r) = T_0 \quad (i = 1, \dots, N).$$

Для ілюстрації наведених вище результатів був проведений числовий аналіз напружено-деформованого стану при плоскій деформації тришарового циліндра у випадку задання температури зовнішнього середовища T_0. Циліндр складався із шарів, матеріали яких характеризуються такими пружними постійними: I шар - $E_1 = 2\cdot10^6$ Н/м^2; $\nu_1 = 0{,}3$; $\alpha_1 = 8\cdot10^{-6}$ град$^{-1}$; II - $E_2 = 1{,}16\cdot10^6$ Н/м^2; $\nu_2 = 0{,}3$; $\alpha_2 = 4\cdot10^{-6}$ град$^{-1}$; III - $E_3 = 7\cdot10^5$ Н/м^2; $\nu_3 = 0{,}3$; $\alpha_3 = 11\cdot10^{-6}$ град$^{-1}$. Результати обчислень при температурі зовнішнього середовища $T_0 = 100$ ^{0}C і значеннях безрозмірних радіусів шарів циліндра $R_1 = 0{,}6$; $R_2 = 0{,}8$; $R_3 = 1{,}0$ представлені на рисунку. Тут наведено залежності безрозмірних переміщень $u^* = u/R_3$ /лінія 1/ і напружень $\sigma_r^* = \sigma_r/E_1$, $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta/E_1$, $\sigma_z^* = \sigma_z/E_1$ /відповідно лінії 2, 3, 4/ від радіальної координати r.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.90

УДК 539.3

Р.М.Луцишин

ПРО ЗГИН СМУГИ З КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ПРИ НЕПОВНОМУ КОНТАКТІ

Нехай у круговий отвір одиничного радіуса безмежної смуги /рис. 1/ вставлено колову шайбу з того ж матеріалу і такого ж радіуса. Смуга навантажена на нескінченності згинаючими моментами M і напруженнями p. Під дією цього навантаження одиничне коло γ розділяється на дві дуги: зону контакту (β, α) і вільну зону (α, β). Вважається, що тертя між берегом отвору і краєм шайби відсутнє.

Розв"язання цієї задачі, згідно з працею Д.В.Грилицького, Р.М.Луцишина*, зводиться до системи задач лінійного спряження

*Грилицький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов. Львів, 1975.

$$[F(t)+H(t)]^{+}+[F(t)+H(t)]^{-}=2f(t);$$
$$[F(t)-H(t)]^{+}-[F(t)-H(t)]^{-}=0, \quad t\in\gamma, \qquad /1/$$

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t\in(\alpha,\beta); \\ \frac{1}{t}\int_{\beta}^{t}\sigma_r(t)dt, & t\in(\beta,\alpha), \end{cases} \qquad /2/$$

де $\sigma_r(t)$ – шукане контактне напруження.

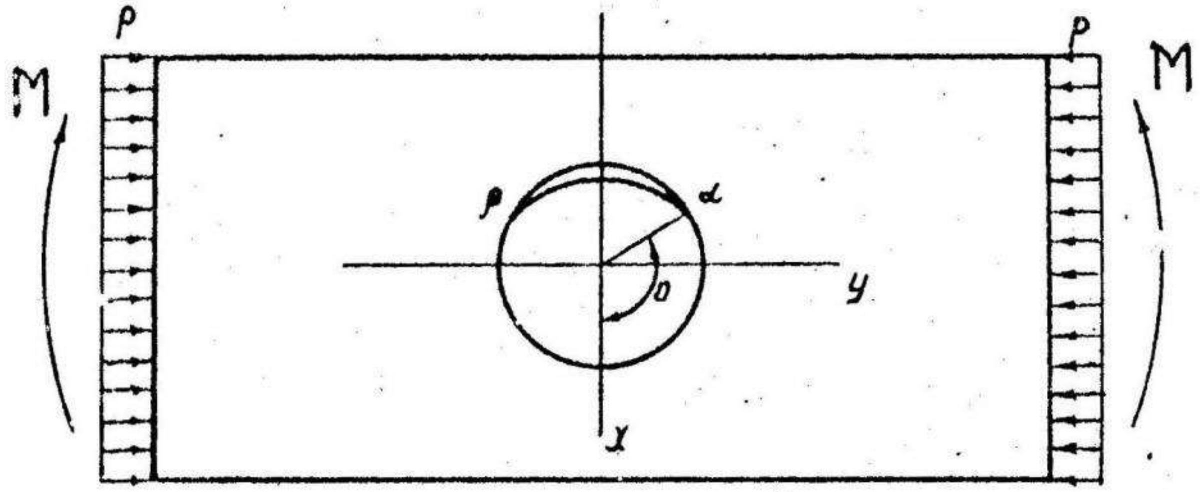


Рис. 1.

Функції $F(z)$ і $H(z)$ мають такі розклади при великих і малих значеннях $|z|$:

$$F(z)=\begin{cases} A_1+A_2 z+\ldots, & |z|<1; \\ \frac{Mz}{8J}+\frac{1}{4}p+\frac{a_0}{z}+\ldots, & |z|>1; \end{cases}$$

$$H(z)=\begin{cases} \frac{M}{8Jz^3}+\frac{p}{2z^2}+\frac{M}{4Jz}+\left(\frac{1}{4}p+\bar{b}_1\right)+\ldots, & |z|<1; \\ \bar{A}_1+\frac{\bar{B}_0+2A_2}{z}+\ldots, & |z|>1, \end{cases} \qquad /3/$$

де J – момент інерції перерізу балки.

Розв"язок системи /1/ з урахуванням /3/ має вигляд

$$
F(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha}\dfrac{f(t)dt}{t-z}-\bar{A}_1\,, & |z|<1\,; \\ -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha}\dfrac{f(t)dt}{t-z}+\dfrac{Mz}{8J}+\dfrac{1}{4}\rho-\dfrac{M}{8Jz^3}-\dfrac{\rho}{2z^2}-\dfrac{M}{4Jz}\,, & |z|>1\,; \end{cases}
$$

$$
H(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha}\dfrac{f(t)dt}{t-z}-\dfrac{Mz}{8J}-\dfrac{1}{4}\rho+\dfrac{M}{8Jz^3}+\dfrac{\rho}{2z^2}+\dfrac{M}{4Jz}\,, & |z|<1\,; \\ -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha}\dfrac{f(t)dt}{t-z}+\bar{A}_1\,, & |z|>1\,; \end{cases} \qquad /4/
$$

$$
A_1=\frac{1}{4\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{t}.
$$

Задовольняючи умову контакту $v_r^+ - v_r^- = 0$ на (β,α) , приходимо до сингулярного інтегрального рівняння щодо шуканої функції $f(t)$:

$$
\frac{1}{\pi i}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{f(t)-\frac{\sigma}{t}\overline{f(t)}}{t-\sigma}dt-2A_1-\frac{M}{8J}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{\rho}{2}-
$$

$$
-\frac{M}{J}\left(\frac{1}{\sigma^3}+\sigma^3\right)+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{\sigma^2}+\sigma^2\right)-\frac{M}{4J}\left(\frac{1}{\sigma}+\sigma\right)=0,\ \sigma\in(\beta,\alpha). \qquad /5/
$$

Формула обертання цього рівняння

$$
f(t)-\overline{f(t)}=X^{+}(t)\left[\mathcal{D}_2t^2+\mathcal{D}_1t+\mathcal{D}+\frac{\mathcal{D}_{-1}}{t}+\frac{\mathcal{D}_{-2}}{t^2}+\frac{\mathcal{D}_{-3}}{t^3}\right]=S(t), \qquad /6/
$$

де

$$
X(z)=\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}\,,
$$

$$
\mathcal{D}_2=-\mathcal{D}_{-3}=-\frac{M}{16J}\,;\quad \mathcal{D}_1=-\mathcal{D}_{-2}=\frac{\rho}{2}-\frac{M}{16J}\cos\theta\,;
$$

$$
\mathcal{D}=-\mathcal{D}_{-1}=-\frac{M}{32J}(10-3\sin^2\theta)+\frac{\rho}{2}\cos\theta. \qquad /7/
$$

Із /6/, враховуючи /2/, отримуємо

$$
\sigma_r(t)=\frac{1}{2}\left(t\,\frac{dS}{dt}-\int\frac{S(t)}{t}dt\right)+d\,,
$$

$$
f(t)=\frac{1}{2}\left(S(t)-\int\frac{S(t)}{t}dt\right)+d. \qquad /8/
$$

Із рівності нулеві напруження $\sigma_r(t)$ в кінцевих точках зони контакту α і β отримується залежність величини зони контакту θ від зовнішнього навантаження

$$\frac{1+3\cos\theta}{13\cos^2\theta+6\cos\theta+7}=\frac{M}{4Jp}, \qquad /9/$$

а також стала інтегрування d :

$$d=(1+\cos\theta)\left[\frac{M}{32J}(10-5\sin^2\theta+2(1-\cos\theta))+\frac{1}{4}p(1-3\cos\theta)\right]\ln 2|\sin\theta|. \qquad /10/$$

Підставляючи /7/ і /10/ у /8/, отримуємо вирази для шуканої функції:

$$f(t)=\frac{1}{2}X^{+}(t)\left\{\frac{M}{32J}\left[-\frac{4}{3}t^2-\frac{4}{3}t\cos\theta+\left(2\sin^2\theta-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{t}\left(\frac{56}{3}-4\sin^2\theta\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{8}{3}\frac{\cos\theta}{t^2}+\frac{8}{3}\frac{1}{t^3}\right]-p\left(\frac{\cos\theta}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\right\}-\frac{1+\cos\theta}{2}\left\{\frac{M}{32J}(10-5\sin^2\theta+\right.$$

$$\left.+2(1-\cos\theta))+\frac{1}{4}p(1-3\cos\theta)\right\}\ln\left[4(1-\cos\theta)(t+(1-\cos\theta)+\frac{1}{t}+\right.$$

$$\left.+X^{+}(t)\left(1+\frac{1}{t}\right))\right]+d \qquad /11/$$

і шуканого контактного напруження

$$\sigma_r(\varphi)=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2|\cos\theta-\cos\varphi|}}\left\{\frac{M}{32J}\left(2\sin\frac{5\varphi}{2}+2\cos\theta\sin\frac{3\varphi}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(10-\sin^2\theta)\sin\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{1}{2}p\left(\sin\frac{3\varphi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\sqrt{2|\cos\theta-\cos\varphi|}}{2}\left\{\frac{M}{32J}\left[-\frac{26}{3}\cos\frac{5\varphi}{2}-\frac{14}{3}\cos\theta\cos\frac{3\varphi}{2}+\left(\sin^2\theta+\frac{22}{3}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+p\cos\frac{3\varphi}{2}\right\}-\frac{1+\cos\theta}{2}\left\{\frac{M}{32J}\left(10-5\sin^2\theta+2(1-\cos\theta)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}p(1-3\cos\theta)\right\}\ln\left[\frac{1+2\cos\varphi-\cos\theta+2\sqrt{2|\cos\theta-\cos\varphi|}}{1+\cos\theta}\cos\frac{\varphi}{2}\right]. \qquad /12/$$

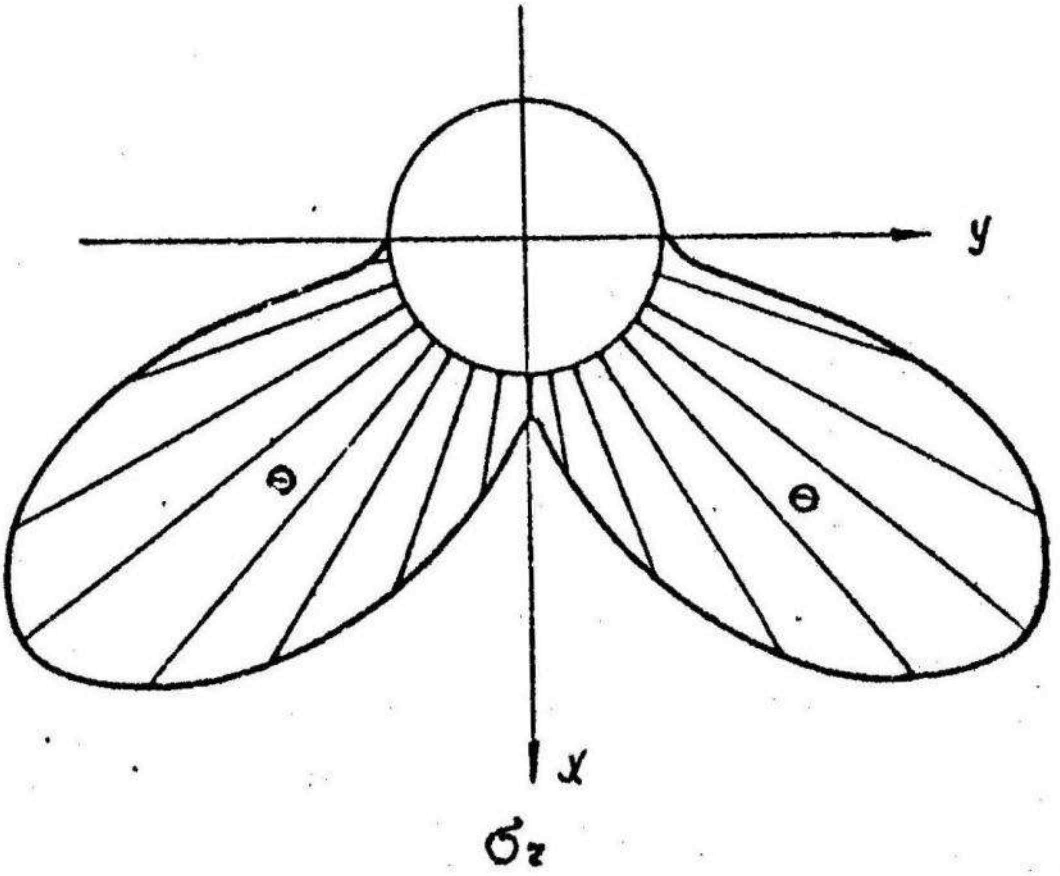


Рис. 2.

Як приклад розглянемо випадок, коли зона контакту становить половину кола, тобто $\theta = \pi/2$. З формули /9/ випливає, що це досягається при такому підборі навантаження $M/J = 16/7p$, причому $M < 0$ і $p < 0$. Результати підрахунку контактних напружень σ_r за формулою /12/ зображені на рис. 2.

Стаття надійшла до редколегії 02.02.90

УДК 517.512

Я.Г.Притула

ПРО ЗБІЖНІСТЬ МАЙЖЕ ВСЮДИ РЯДІВ ФУР"Є МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо тригонометричний ряд

$$T(x)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} c_\lambda e^{i\lambda x} \qquad x\in\mathbb{R},$$

де множина $\Lambda=\{\lambda \mid c_\lambda\neq 0\}$ - зачисленна і сума

$$S_\omega(x)=\sum_{|\lambda|\le\omega} c_\lambda e^{i\lambda x}$$

має сенс /наприклад, $\sum_{|\lambda|\le\omega}|c_\lambda|<\infty$/.

Відомо /теорема Карлесона/, що з умов

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}|c_\lambda|^2<\infty \quad \text{і} \quad \Lambda=\mathbb{Z}$$

випливає збіжність майже всюди ряду $T(x)$. Для майже періодичних функцій, в силу довільності Λ, така теорема не має місця. Це доведено у праці [1]. Там же доведено, що збіжність майже всюди забезпечує умова

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\le\lambda<m+1}|c_\lambda|\Big)^2<\infty . \qquad /1/$$

Ця умова є у праці Вінера [4], де він показав, що з умови /1/ випливає існування S^2 майже періодичної функції $f(x)$ з рядом Фур"є $T(x)$, який S^2 збігається до $f(x)$.

Торнехаве і Фольнер [3] показали, що для S^2 майже періодичної функції, у якої коефіцієнти Фур"є $c_\lambda>0$, умова Вінера /1/ виконується, а отже, ряд Фур"є збігається майже всюди.

Наступна теорема є узагальненням цього твердження.

Теорема. Якщо для послідовності показників Фур"є S^2 - м.п. функції $\Lambda=\{\lambda_n\}$ і відповідної послідовності аргументів $\{\theta_k\}=\{\arg c_{\lambda_k}\}$ існує α $(0\le\alpha<\pi/4)$, для якого система нерівностей

$$|\lambda_k t+\theta_k|\le\alpha \pmod{2\pi} \qquad /2/$$

має розв"язок, то умова Вінера виконується, а отже, ряд Фур"є збігається майже всюди.

Очевидно, що за умови $C_\lambda > 0$ система завжди має розв"язок $(t=0)$. Система /2/ також має розв"язок, якщо система $\{\lambda_k\}$ – лінійно незалежна над полем раціональних чисел. Це випливає з теореми Кронеккера.

Для доведення теореми скористаємось таким твердженням.

__Лема.__ Якщо для комплексних чисел $a_1 a_2 \dots a_n$ виконується умова

$$a \le \arg a_i \le a + \alpha_0, \quad 0 \le \alpha_0 < \pi, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

тоді

$$\cos\frac{\alpha_0}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i| \le \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|.$$

Доведення теореми. Нехай $p(t) = e^{-t^2/2}$

$$e_{n+1} = p(n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad e_0 = 1.$$

Зрозуміло, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\lambda t} dt = (2\pi)^{1/2} p(\lambda). \qquad /3/$$

Визначимо норму

$$(D_E[f(t)])^2 = \sup_u \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,|f(x+u)|^2 dt. \qquad /4/$$

Мають місце співвідношення / K_i – константи/

$$K_1 (D_{S^2}[f(t)])^2 \le (D_E[f(t)])^2 \le K_2 (D_{S^2}[f(t)])^2. \qquad /5/$$

Нехай $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}$ – поліном або абсолютно збіжний ряд і послідовності $\{\lambda_k\}$ і $\{\theta_k = \arg c_k\}$ задовольняють умови теореми. Тоді з /3/

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) [T(t+u)]^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_m \bar{c}_n e^{i(\lambda_m - \lambda_n)u} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{i(\lambda_m - \lambda_n)t} dt = (2\pi)^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_m \bar{c}_n e^{i(\lambda_m - \lambda_n)u} p(\lambda_m - \lambda_n),$$

з /4/, /5/ одержуємо

$$(D_{S^2}[T(t)])^2 \le K_3 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |c_m||c_n|\, p(\lambda_m - \lambda_n),$$

$$(D_{S^2}[T(t)])^2 = \sup_u \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,|T(t+u)|\, dt =$$

$$= \sup_{u} (2\pi)^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |c_m||c_n| e^{i(\lambda_m u+\theta_m)} e^{-i(\lambda_n u+\theta_n)} p(\lambda_m-\lambda_n).$$

З умов теореми і леми записуємо

$$(D_{S^2}[T(t)])^2 \geq (2\pi)^{1/2}\cos 2\alpha \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |c_n||c_m| p(\lambda_m-\lambda_n). \qquad /6/$$

Введемо позначення

$$\mathbb{C}_m = \sum_{m\leq\lambda_\mu<m+1} |c_\mu|$$

і

$$S_{m,n} = \sum_{\substack{m\leq\lambda_\mu<m+1\\ n\leq\lambda_\nu<n+1}} p(\lambda_\mu-\lambda_\nu)|c_\mu||c_\nu|.$$

Очевидно, що

$$S_{m,n} \leq e_{|m-n|} \sum_{\substack{m\leq\lambda_\mu<m+1\\ n\leq\lambda_\nu<n+1}} |c_\mu||c_\nu| = e_{|m-n|}\,\mathbb{C}_m\,\mathbb{C}_n .$$

Аналогічно

$$S_{m,n} \geq p(|m-n|+1)\,\mathbb{C}_m\,\mathbb{C}_n .$$

З нерівності /6/ маємо

$$(D_{S^2}[T(t)])^2 \geq (2\pi)^{1/2}\cos 2\alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(|m-n|+1)\,\mathbb{C}_m\,\mathbb{C}_n .$$

Відкинувши члени з $m \neq n$, одержимо

$$(D_{S^2}[T(t)])^2 \geq (2\pi)^{1/2}\cos 2\alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(1)\,\mathbb{C}_m^2 = K_4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}_m^2 . \qquad /7/$$

Розглянемо послідовність поліномів Бохнера-Фейєра для функції $f(t)$ [2]

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{N,n} A_n e^{i\lambda_n t},$$

яка збігається в метриці S^2 до $f(t)$. Послідовність $K_{N,n}$ задовольняє умови

$$0 \leq K_{N,n} \leq 1, \quad K_{N,n} = 0 \qquad \text{при} \quad n > N,$$

$$\lim_{N\to\infty} K_{N,n} = 1 .$$

Згідно з доведеною нерівністю /7/

$$K_4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{m\leq\lambda_n<m+1} K_{N,n} |A_n| \Big)^2 \leq (D_{S^2}[S_N(t)])^2$$

Звідси для довільного ρ

$$K_4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m \le \lambda_n < m+1 \\ n \le \rho}} K_{N,n} |A_n| \Big)^2 \le \big(D_{S^2}[S_N(t)] \big)^2 .$$

При $N \to \infty$ одержуємо

$$K_4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m \le \lambda_n < m+1 \\ n < \rho}} |A_n| \Big)^2 \le \big(D_{S^2}[f(t)] \big)^2 .$$

Тепер при $\rho \to \infty$ для довільного M маємо

$$K_4 \sum_{m=-M}^{M} \Big(\sum_{m \le \lambda_n < m+1} |A_n| \Big)^2 \le \big(D_{S^2}[f(t)] \big)^2 .$$

Теорема доведена.

1. Г у н и я Н.Г. Замечание о сходимости рядов Фурье почти периодических функций Степанова // Тр. Тбилис. мат. ин-та. 1985. Т.76. С. 3-17. 2. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., 1953. 3. Tornehawe H. On the Fourier series of Stepanov almost-periodic functions // Math. Scand. 1954. Vol.2. P.237-242. 4. Wiener N. On the representation of function by trigonometrical integrals // Math. Z. 1926. Vol.24. P.575-616.

Стаття надійшла до редколегії 02.10.90

УДК 517.956

В.М.Кирилич

ЗАДАЧА ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ ОДНОВИМІРНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

В області $G = \{x, t : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ розглядається система

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t) \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(x,t) u_j + r_{ij}(x,t) f_j(t)] + q_i(x,t), \quad i = \overline{1,n} \qquad /1/$$

де $\lambda_i, a_{ij}, r_{ij}, q_i$ – задані, рівномірно неперервні в G, а u_i, f_i – невідомі функції.

Припустимо, що при всіх $(x,t) \in G$:

$$\lambda_1(x,t) \le \ldots \le \lambda_k(x,t) < 0 < \lambda_{k+1}(x,t) \le \ldots \le \lambda_n(x,t) \quad (0 < k < n).$$

При цих умовах для фіксованого значення індексу $i\,(1\leq i\leq n)$ через кожну точку $(x,t)\in G$ проходить одна характеристика $\xi=\varphi_i(\tau;\,x,t)$, яка визначається задачею Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\lambda_i(\xi,\tau),\quad \xi(t)=x. \qquad /2/$$

Позначимо для зручності

$$F_i(x,t,u)\equiv\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_j(x,t)+q_i(x,t),\quad i=\overline{1,n}.$$

Задача полягає у визначенні функцій $u\in C(G),\ f\in C[0,T]$ з умов:

$$u_i(x,0)=g_i(x),\ 0\leq x\leq l,\quad i=\overline{1,n}; \qquad /3/$$

$$u_i(0,t)=H_i(t),\ 0\leq t\leq T,\ i=\overline{1,k}; \qquad /4/$$

$$u_i(l,t)=H_i(t),\ 0\leq t\leq T,\ i=\overline{k+1,n}; \qquad /5/$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\alpha_{si}(x,t)u_i(x,t)\,dx=h_s(t),\ 0\leq t\leq T,\ s=\overline{1,n}. \qquad /6/$$

Тут g_i, H_i, α_{si}, h_s – задані функції.

У близькій постановці для x – гіперболічної системи, у відсутності /6/, обернена задача розглядалася в праці [3]. Для параболічних рівнянь задачі з інтегральними перевизначеннями вивчались у праці [5]. "Прямі" задачі з інтегральними умовами для гіперболічних систем розглянуті в статті [2].

Введемо матрицю

$$A(t)=\left\|\int_0^l\alpha(x,t)r(x,t)\,dx\right\|$$

/ α, r – матриці, складені з відповідних елементів α_{si}, r_{ij} /.

Припустимо, що

$$\det A(t)\neq 0,\quad 0\leq t\leq T \qquad /7/$$

і виконуються умови узгодження

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\alpha_{si}(x,0)g_i(x)\,dx=h_s(0),\quad s=\overline{1,n},$$

$$H_i(0)=\begin{cases} g_i(0),\ i=\overline{1,k},\\ g_i(l),\ i=\overline{k+1,n}. \end{cases} \qquad /8/$$

Лема 1. Функції $\varphi_i \ (i=\overline{1,n})$ при $(x,t)\in G,\ 0\leq\tau\leq t$ – неперервно диференційовані, причому мають місце формули

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x}=\exp\Big(-\int_\tau^t\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)d\sigma\Big); \qquad /9/$$

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial t}=-\lambda_i(x,t)\exp\Big(-\int_\tau^t\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)d\sigma\Big). \qquad /10/$$

Доведення. Неперервна диференційованість функцій φ_i відома з теорем звичайних диференціальних рівнянь. Формули /9/–/10/ одержуються за допомогою інтегрування рівняння у варіаціях для /2/ [4, § 21, задача 3].

Лема 2. Функції $t_i(x,t)$ /ординати точки перетину i -ї характеристики з прямими $\xi=0 \ (i=\overline{1,k})$ і $\xi=l \ (i=\overline{k+1,n})$) при $(x,t)\in G$ – неперервно диференційовані, причому

$$\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}=-\frac{1}{\lambda_i(\varphi_i(t_i(x,t);x,t),t_i(x,t))}\times$$

$$\times\exp\Big(-\int_{t_i(x,t)}^{t}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\Big); \qquad /11/$$

$$\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}=\frac{\lambda_i(x,t)}{\lambda_i(\varphi_i(t_i(x,t);x,t),t_i(x,t))}\times$$

$$\times\exp\Big(-\int_{t_i(x,t)}^{t}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)d\sigma\Big). \qquad /12/$$

Доведення. Виходячи з означення $t_i(x,t)$, маємо $\varphi_i(t_i(x,t);x,t)\equiv 0,\ i=\overline{1,k},\ \varphi_i(t_i(x,t);x,t)\equiv l,\ i=\overline{k+1,n}$.
Згідно з /2/

$$\frac{\partial\varphi_i(s;x,t)}{\partial s}\Big|_{s=t_i(x,t)}=\lambda_i(\varphi_i(s;x,t),s)\Big|_{s=t_i(x,t)}\neq 0.$$

Тоді на основі теореми про неявну функцію одержуємо неперервну диференційовність $t_i(x,t)$ в G. Далі, диференціюючи ці тотожності по x або по t, враховуючи /9/–/10/, одержимо /11/–/12/.

Лема 3. Для рівномірно неперервних на G функцій u, f система /1/ рівносильна системі інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \omega_i(x,t) + \int\limits_{\gamma_i(x,t)}^{t} \Big[F_i(\varphi_i(\tau; x,t), \tau, u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(\varphi_i(\tau; x,t), \tau) f_j(\tau) \Big] d\tau, \quad (x,t) \in G, \; i = \overline{1,n}, \qquad /13/$$

де

$$\omega_i(x,t) = \begin{cases} H_i(t_i(x,t)), & \text{при } 0 \le x \le \varphi_1(t;0,0), \; i = \overline{1,k}, \\ g_i(\varphi_i(0;x,t)), & \text{при } \varphi_1(t;0,0) \le x \le l, \; i = \overline{1,n}, \\ H_i(t_i(x,t)), & \text{при } \varphi_n(t;l,0) \le x \le l, \; i = \overline{k+1,n}, \end{cases}$$

$$\begin{matrix} t_i(x,t), & \text{при } 0 \le x \le \varphi_1(t;0,0), \; i = \overline{1,k}, \\ 0, & \text{при } \varphi_1(t;0,0) \le x \le \varphi_n(t;l,0), \; i = \overline{1,n}, \\ t_i(x,t) & \text{при } \varphi_n(t;l,0) \le x \le l, \; i = \overline{k+1,n}. \end{matrix}$$

Доведення. Перехід від /1/, /3/-/5/ одержуємо за допомогою підстановки в /1/ замість x, t значень $\xi = \varphi_i(\tau; x,t)$, τ і інтегрування по τ від $\gamma_i(x,t)$ до t, тобто інтегрування вздовж характеристик i-ї сім"ї. Зворотний перехід здійснюється за допомогою цієї ж підстановки в /13/ і наступного диференціювання по τ при $\tau = t$, тобто диференціювання вздовж характеристики i-ї сім"ї [1].

Теорема. Нехай
1/ функції $\lambda_i \in C^2(G)$, $i = \overline{1,n}$; 2/ функції a_{ij}, r_{ij}, $q_i \in C(G)$, $i,j = \overline{1,n}$; 3/ функції $g_i \in C[0,l]$, $i = \overline{1,n}$;
4/ функції $H_i \in C[0,T]$, $h_i \in C^1[0,T]$, $i = \overline{1,n}$;
5/ виконуються умови /7/-/8/.

Тоді задача /1/-/6/ має в G єдиний неперервний узагальнений розв"язок ($u \in C(G)$, $f \in C[0,T]$).

Доведення. Підставивши /13/ в /6/, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{k} \int_0^{\varphi_i(t;0,0)} \alpha_{si}(x,t) \int_{t_i(x,t)}^{t} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(\varphi_i(\tau; x,t), \tau) f_j(\tau) d\tau dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{K}\int\limits_{\varphi_i(t;0,0)}^{l}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)f_j(\tau)d\tau dx\,+$$

$$+\sum_{i=K+1}^{n}\int\limits_0^{\varphi_i(t;l,0)}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)f_j(\tau)d\tau dx\,+$$

$$+\sum_{i=K+1}^{n}\int\limits_{\varphi_i(t;l,0)}^{l}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)f_j(\tau)d\tau dx\,+$$

$$+\sum_{i=1}^{K}\int\limits_0^{\varphi_i(t;0,0)}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u)d\tau dx\,+$$

$$+\sum_{i=1}^{K}\int\limits_{\varphi_i(t;0,0)}^{l}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_0^t F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u)d\tau dx\,+$$

$$+\sum_{i=K+1}^{n}\int\limits_0^{\varphi_i(t;l,0)}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{n}F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u)d\tau dx\,+$$

$$+\sum_{i=K+1}^{n}\int\limits_{\varphi_i(t;l,0)}^{l}\alpha_{si}(x,t)\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\sum_{j=1}^{n}F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u)d\tau dx\,= \qquad /14/$$

$$= G_s(t),\quad s=\overline{1,n},$$

де через $G_s(t)$ позначені вирази, в які не входять u і f

Таким чином, задача звелася до знаходження системи неперервних функцій $\{u_i(x,t)\}, \{f_i(x,t)\}$, для яких виконуються співвідношення /13/–/14/.

Із формул /11/ бачимо, зокрема, що $\frac{\partial t_i}{\partial x} \neq 0$ в G і тому, на основі теореми про неявну функцію, в G рівняння $\tau = t_i(x,t)$ можна розв"язати відносно x. Позначимо одержану функцію через $x = \rho_i(\tau, t)$; в силу цієї ж теореми вона неперервно диференційована.

Використовуючи введені функції ρ_i, формули /7/, /9/–/10/, враховуючи, що $(\varphi_i(t;0,0),t) \equiv 0$ $(i = \overline{1,k})$, $(\varphi_i(t;l,0),t) \equiv 0$ $(i = \overline{k+1,n})$, і зробивши деякі перетворення в /14/ /перестановка порядку інтегрування, заміна змінної інтегрування диференціювання по t /, приходимо до рівності

$$f(t) = (Lf)(t) + (\tilde{\ }u)(t) + \Phi(t), \qquad /15/$$

де $f = col(f_1, \ldots, f_n)$, $u = col(u_1, \ldots, u_n)$, L, $\tilde{L}$ – матричні лінійні оператори типу Вольтерра, елементи як[их] мають неперервні ядра, що діють відповідно на вектор-функцію f і u; Φ – відомий неперервний стовпчик висоти n.

Рівняння /13/ має вигляд

$$u(x,t) = \omega(x,t) + (L_1 f)(x,t) + (\tilde{L}_1 u)(x,t), \qquad /16/$$

де ω – відомий неперервний стовпчик, L_1, $\tilde{L}_1$ – інтегральні оператори типу Вольтерра.

Отже, для визначення функцій u, f ми одержали систему лінійних інтегральних рівнянь /15/–/16/ типу Вольтерра другого роду, яку можна розв"язати стандартним методом ітерацій.

1. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып. 3. С.87–104. 2. М е л ь н и к З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т.21. № 2. С.245–253. 3. О р л о в с к и й Д.Г. К задаче определения правой части гиперболической системы // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19. № 8. С.137–146. 4. П е т р о в с к и й И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964. 5. С о л о в ь е в В.В. Одна одномерная обратная задача для уравнения теплопроводности с интегральным переопределением // Функциональные методы в задачах математической физики: Сб. науч. тр. М., 1985. С.54–56.

Стаття надійшла до редколегії 02.10.90

УДК 517.917

Л.М.Лісович

ОДНА ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ І ЄДИНОСТІ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З СУМОВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Означення 1. Функцію $f(x,y)$ називатимемо обмеженою за типом I в області $\mathcal{D}=\{x_0\le x\le x_0+H;\ y_0-a\le y\le y_0+a\}$, якщо для $(x,y)\in\mathcal{D}$

$$\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,y)|^p dt\right\}^{1/p}< A, \qquad /1/$$

де A – стала, яка не залежить від $(x,y)\in\mathcal{D}$, $p\ge 1$.

Означення 2. Будемо вважати, що функція $f(x,y)$ задовольняє умову типу II по y в області $\mathcal{D}$, якщо рівномірно стосовно $x\in[x_0,x_0+H]$ та $\bar{y},\bar{\bar{y}}\in[y_0-a,y_0+a]$ виконується нерівність

$$\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,\bar{y})-f(t,\bar{\bar{y}})|^p dt\right\}^{1/p}\le L|\bar{y}-\bar{\bar{y}}|, \qquad /2/$$

де L – стала, незалежна від x.

Розглянемо тепер скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \qquad /3/$$

Теорема 1. Нехай у рівнянні /3/ $f(x,y)$ – сумовна по x функція разом зі своїм p-м степенем $(p\ge 1)$ на відрізку $X=[x_0,x_0+H]$ рівномірно стосовно $y\in Y=[y_0-a,y_0+a]$ неперервна по $y\in Y$ і задовольняє умови /1/ та /2/ майже всюди в області $\mathcal{D}$. Тоді рівняння /3/ майже всюди на відрізку $X'=\{x_0\le x\le x_0+h\}$, де $h=\min\left(\frac{1}{L},\frac{a}{A}\right)$ має єдиний розв"язок $y(x)$ такий, що

$$y(x)\in[y_0-a,y_0+a],\ y(x_0)=y_0,\ |y(x+\Delta x)-y(x)|<A|\Delta x|.$$

Доведення. Зауважимо, що майже всюди на $[x_0,x_0+H]$

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt=f(x,\varphi(x)).$$

Тому рівняння /3/ еквівалентне майже всюди на X інтегральному рівнянню

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt. \qquad /4/$$

Доведення теореми проведемо методом послідовних наближень, прийнявши

$$y_0(x)=y(x_0)=y_0\ ;$$

$$y_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_k(t))dt\ , \quad (k=0,1,2,\dots). \qquad /5/$$

Розглянемо відрізок $[x_0, x_0+h]$ /для відрізка $[x_0-h, x_0]$ доведення аналогічне/ і покажемо перш за все, що функції $y_k(x)$ існують, є неперервні та диференційовні майже всюди на $[x_0, x_0+h]$ та задовольняють нерівності

$$|y_k(x)-y_0|\le A|x-x_0|, \quad x\in[x_0, x_0+h]. \qquad /6/$$

Зрозуміло, що нульове наближення y_0 задовольняє ці умови. Припустимо, що $y_k(x)$ також задовольняє ці умови. Тоді функція $f(x,y_k(x))$ є сумовна на $[x_0, x_0+h]$. Використовуючи тепер умову /1/ та нерівність Гельдера, маємо

$$|y_{k+1}(x)-y_0|\le\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x}^{x_0}|f(t,y_k(t))|^p dt\right\}^{1/p}|x-x_0|\le A|x-x_0|<a,$$

якщо лиш $|x-x_0|<\frac{a}{A}$.

Звідси випливає, що всі наближення належать до області

$$\mathcal{D}'=\{x_0\le x\le x_0+h;\ y_0-a\le y\le y_0+a\}.$$

Далі

$$|y_k(x+\Delta x)-y_k(x)|\le\left\{\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}|f(t,y_{k-1}(t))|^p dt\right\}^{1/p}|\Delta x|\le A|\Delta x|,$$

тобто всі наближення неперервні на $[x_0, x_0+h]$.

Оскільки функція $f(x,y_k(x))$ сумовна по x і неперервна по y_k, то майже всюди в $[x_0, x_0+h]$ існує похідна $\frac{dy_k}{dx}$, тобто кожне наближення $y_k(x)$ диференційовне майже всюди в $[x_0, x_0+h]$.

Покажемо тепер, що послідовність $\{y_k(x)\}$ рівномірно збіжна майже всюди на $[x_0, x_0+h]$. Для цього, як відомо, досить показати, що ряд

$$y_0+\sum_{k=0}^{\infty}(y_{k+1}(x)-y_k(x)) \qquad /7/$$

є рівномірно збіжним майже всюди на $[x_0, x_0+h]$. Маємо

$$|y_1(x)-y_0|\le A|x-x_0|. \qquad /8/$$

Далі на основі умов теореми, нерівності Гельдера та /8/ отримуємо

$$|y_2(x)-y_1(x)| \le \left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t))-f(t,y_0)|^p dt\right\}^{1/p}|x-x_0| \le$$

$$\le L|y_1(x)-y_0||x-x_0| \le AL|x-x_0|^2 \qquad /9/$$

. . . .

$$|y_{k+1}(x)-y_k(x)| \le AL^k|x-x_0|^{k+1}. \qquad /10/$$

Якщо $|x-x_0| < \frac{1}{L}$, то ряд

$$A\sum_{k=0}^{\infty}L^k|x-x_0|^{k+1}$$

збіжний. Тому ряд /7/, коли $|x-x_0| < \min\left(\frac{1}{L}, \frac{a}{A}\right)$, є рівномірно збіжний майже всюди на $[x_0, x_0+h]$ до функції $y(x)$, причому $y(x)$ як рівномірна границя майже всюди на $[x_0, x_0+h]$ неперервних функцій є неперервною майже всюди на $[x_0, x_0+h]$. Оскільки існує рівномірна границя $\lim\limits_{k\to\infty} y_k(x) = y(x)$, то для $\delta > 0$ можна вказати таке число $K = K(\delta)$, що коли $k > K$, то $|y_k(x)-y(x)| < \delta$. Тоді, використовуючи умови теореми та нерівність Гельдера, маємо

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_k(t))-f(t,y(t))]dt\right| \le$$

$$\le\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,y_k(t))-f(t,y(t))|^p dt\right\}^{1/p}|x-x_0| < L|y_k(x)-y(x)||x-x_0| < \delta,$$

тобто $y(x)$ є неперервним майже всюди на $[x_0, x_0+h]$ розв"язком рівняння /3/.

Залишилось довести, що цей розв"язок єдиний. Припустимо, що це не так, тобто рівняння /3/ має майже всюди на $[x_0, x_0+h]$ два різні розв"язки $y(x)$ і $z(x)$ такі, що $y(x_0) = z(x_0) = y_0$. Тоді, використавши умови /1/ та /2/ і нерівність Гельдера, отримаємо

$$|y(x)-z(x)| = \left|\int_{x_0}^{x_0} f(t,y(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t,z(t))dt\right| \le$$

$$\le \delta + \left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(t,y(t))-f(t,z(t))|^p dt\right\}^{1/p}|x-x_0| \le$$

$$\le \delta + L|y(x)-z(x)||x-x_0| .$$

Звідси

$$|y(x)-z(x)| < \frac{\delta}{1-L|x-x_0|} \qquad /11/$$

Оскільки $|x-x_0| < \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{a}{A}\right\}$, а $\delta > 0$ як завгодно мале, то з /11/ випливає, що $y(x) \equiv z(x)$ майже всюди на $[x_0, x_0+h]$. Теорема доведена.

Теорема 1 легко узагальнюється на випадок, коли рівняння /3/ є векторним, тобто $f=\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, $y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Означення 3. Функцію $f(x,y)$ називатимемо обмеженою за типом 1 в області $\mathcal{D}$, якщо для $(x,y)\in\mathcal{D}$

$$\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\|f(t,y)\|^p dt\right\}^{1/p} < A, \qquad /12/$$

де A – стала, яка не залежить від $(x,y)\in\mathcal{D}$, $p\geq 1$.

Означення 4. Будемо вважати, що функція $f(x,y)$ задовольняє умову типу II по y в області $\mathcal{D} = X\times Y$, якщо рівномірно стосовно $x\in X$ і $\bar{y}, \bar{\bar{y}} \in Y$ виконується нерівність

$$\left\{\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\|f(t,\bar{y})-f(t,\bar{\bar{y}})\|^p dt\right\}^{1/p} \leq L\|\bar{y}-\bar{\bar{y}}\|, \qquad /13/$$

де L – стала, незалежна від x.

Теорема 2. Нехай у рівнянні /3/ функція $f(x,y)$ сумовна по x разом зі своїм p -м степенем $(p\geq 1)$ на відрізку $X=[x_0, x_0+H]$ рівномірно стосовно $y\in Y=[y_0-a, y_0+a]$, неперервна по $y\in Y$ і задовольняє майже всюди в області $\mathcal{D} = X\times Y$ умови /12/ і /13/. Тоді рівняння /3/ майже всюди на відрізку $X'=[x_0, x_0+h]$, де $h=\min\left\{\frac{1}{L}, \frac{a}{A}\right\}$, має єдиний розв"язок $y(x)$ такий, що

$$y(x)\in\mathcal{D}' = \left\{x_0\leq x\leq x_0+h;\ a-y_0\leq y\leq a+y_0\right\},\ y(x_0)=y_0,$$

$$\|y(x+\Delta x)-y(x)\| < A|\Delta x|.$$

Стаття надійшла до редколегії 02.10.90

З М І С Т

Сборник научных трудов

Министерство высшего и среднего специального
образования УССР

Вестник
Львовского университета
Серия механико-математическая

Издается с 1965 г.

Выпуск 36

ПРИКЛАДНЫЕ
ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИКИ

Львов. Издательство "Свит" при Львовском госуниверситете
290000 Львов-центр, ул. Университетская, 1

Адрес редколлегии: 290000 Львов-центр, ул.Университетская, 1
Университет, кафедра дифференциальных уравнений

Львовская областная книжная типография
290000 Львов, ул. Стефаника, 11
/На украинском языке/

Художній редактор О.М.Козак
Технічний редактор С.Л.Довба
Коректор О.А.Тростянчин

Н/К

Підп. до друку 04.02.91. Формат 60х84/16.
Папір друк. № 3. Умовн. друк. арк. 6,04. Умовн. фарб.-відб. 6,27
Обл.-вид. арк. 5,8[illegible]. Тираж 400 прим. Вид. № 62. Зам. 2139.
Ціна 1 крб. 20 к. Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня
290000 Львів, вул. Стефаника, 11

1 крб. 20 к.

ISSN 0201-758X. 0320-6572
Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 36. 1—104.