УДК 518:517.948

М.Я.Бартіш, С.М.Шахно

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ТИПУ НЬЮТОНА ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У праці [1] для розв"язання нелінійного операторного рівняння

$$P(x) = 0, \qquad /1/$$

де $P(x)$ - оператор, який діє з банахового простору X в банаховий простір Y, ми запропонували метод

$$x_{n+1} = x_n - [P'((1-\mu)x_n + \mu y_n)]^{-1} P(x_n),$$
$$y_{n+1} = x_{n+1} - [P'((1-\mu)x_n + \mu y_n)]^{-1} P(x_{n+1}), \qquad /2/$$

де $n = 0, 1, \ldots$, $x_0 = y_0$ - початкове наближення; μ - довільний дійсний параметр.

При $\mu = 0$ із /2/ отримуємо класичний метод Ньютона, при $\mu = 0{,}5$ - модифікацію методу зі швидкістю $1+\sqrt{2}$ / 2 /. Відзначимо, що на кожній ітерації методу /2/ необхідно обчислювати лише один раз оператори $P(x)$ і $P'(x)$. Крім того, наявність в ітераційних формулах /2/ вільного параметра μ дає змогу розглядати окремі методи з єдиної точки зору, а також досліджувати вплив цього параметра на швидкість збіжності ітерацій.

Достатні умови збіжності ітерацій /2/ до точного розв"язку x^* рівняння /1/ подамо у наступній теоремі.

<u>Теорема</u>. Нехай виконуються умови, що:

1/ для початкового наближення x_0 існує обернений оператор

$$\Gamma_0 = [P'(z_0)]^{-1} = [P'(x_0)]^{-1},$$

причому $\|\Gamma_0\| \le B_0$, де

$$z_0 = (1-\mu)x_0 + \mu y_0;$$

2/ $\|\Gamma_0\| \, \|P(x_0)\| \le \eta_0$;

3/ для $x \in S_0 = \{x : \|x - x_0\| \le 2\eta_0\}$

$$\|P''(x)\| \le M; \quad \|P''(x'') - P''(x')\| \le N\|x'' - x'\|;$$

а/ $h_0 = B_0\left(\frac{N}{3}(1+3\mu^2)\eta_0 + M(1+|\mu|)\right)\eta_0 < \frac{1}{2}$.

Тоді ітераційний процес /I/ збігається по нормі до розв"язку x^* рівняння /2/, який належить до області S_0. При цьому швидкість збіжності ітерації /2/ характеризується оцінкою

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0, \qquad n = 0, 1, \ldots \qquad /3/$$

Як видно з /3/, в цілому гарантується квадратична швидкість збіжності ітераційного процесу /2/. Лише при значенні $\mu = 0{,}5$ вдається довести вищий порядок збіжності – $1+\sqrt{2}$ [2].

Ми провели також експериментальне дослідження методу /2/ при розв"язуванні одного нелінійного рівняння з однією змінною. Для різних початкових наближень розв"язували рівняння

$$x^3 - 2x - 5 = 0, \quad x^* = 2{,}094\,551\,432\,54\ldots; \qquad /4/$$

$$2x - \lg(2x+3) - 1 = 0, \quad x^* = 2{,}304\,104\,389\,74\ldots \qquad /5/$$

до досягнення наближення до розв"язку x^* з точністю $\varepsilon = 10^{-9}$. Подамо залежність кількості ітерацій від параметра μ при різних початкових наближеннях /символ "∞" в таблиці означає розбіжність методу/:

Задача, початкове наближення \ μ	-I000	-I00	-I0	-5	-I	0	0,5	I	5	I0	I00	I000
Задача /4/ $x_0 = y_0 = 2{,}5$	∞	∞	7	6	5	5	4	5	6	∞	∞	∞
$x_0 = y_0 = 5$	∞	∞	∞	∞	7	6	6		∞	∞	∞	∞
Задача /5/ $x_0 = y_0 = 20$	7	7	6	6	5	5	4	5	5	6	7	7
$x_0 = y_0 = -I$	8	6	∞	5	5	4	4	4	5	5	7	7

Числові результати підтверджують, що найбільш ефективним методом з класу /2/ є метод при $\mu = 0{,}5$ / 2 /.

I. Б а р т і ш М.Я., Ш а х н о С.М. Обобщенный метод ньютоновского типа для решения нелинейных операторных уравнений //Применение вычислительной техники и математических методов в научных исследованиях: Тез. докл. науч.-техн. конф. Киев, I99I. С.I32.

2. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь //Доповіді АН УРСР. Сер.А. 1968. № 5. С.387-391.

Стаття надійшла до редколегії 12.12.91

УДК 519.6

Б.М.Голуб, Ю.М.Щербина

АЛГОРИТМ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОГО МІНІМАКСУ

Розглянемо задачу дискретного мінімаксу

$$\min_{x \in R^n} F(x), \qquad F(x) = \max_i f(x), \quad i \in J = \{1, 2, \ldots, l\}, \quad /1/$$

де $f_i(x)$ – неперервно диференційовані функції, а R^n n-мірний евклідів простір.

В /1/ досліджено ефективний підхід для розв"язування задачі /1/, який грунтується на лінеаризації функцій $f_i(x)$. Проаналізуємо модифікацію алгоритму лінеаризації, для збіжності якої не вимагається виконання умов Ліпшиця для функцій $f_i(x)$.

Поставимо у відповідність точці x допоміжну задачу

$$\min_{p,\beta} \left\{ \beta + \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle : \langle f_i'(x), p \rangle + f_i(x) \leq \beta, \ i \in J_\delta(x) \right\}, \qquad /2/$$

де A – симетрична додатно означена матриця, а

$$J_\delta(x) = \{ i \in J : \ f_i(x) \geq F(x) - \delta \}, \qquad \delta > 0.$$

Розв"язок задачі /2/ та її множники Лагранжа позначимо відповідно через $p(x)$, $\beta(x)$ та $u^i(x)$, $i \in J_\delta(x)$;

$$u^i(x) = 0, \qquad i \notin J_\delta(x).$$

Функція Лагранжа для задачі /2/ має вигляд

$$\mathcal{L}(x, u) = \sum_{i \in J} u^i f_i(x).$$

Позначимо через L та D фактори Холеського для матриці:

$$A = LDL^T,$$

де L – нижня трикутна одинична матриця; D – додатна діагональна матриця; L^T – транспонована L.

Нехай вибрачі числа $\sigma > 0$, $S > 1$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1/2$, $c_0 > 0$, $0 < \gamma < 1$ та початкове наближення x_0. Вважатимемо, що