2. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь //Доповіді АН УРСР. Сер.А. 1968. № 5. С.387-391.

Стаття надійшла до редколегії 12.12.91

УДК 519.6

Б.М.Голуб, Ю.М.Щербина

АЛГОРИТМ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОГО МІНІМАКСУ

Розглянемо задачу дискретного мінімаксу

$$\min_{x \in R^n} F(x), \qquad F(x) = \max_i f(x), \quad i \in J = \{1, 2, \ldots, l\}, \qquad /1/$$

де $f_i(x)$ – неперервно диференційовані функції, а R^n n-мірний евклідів простір.

В /1/ досліджено ефективний підхід для розв"язування задачі /1/, який грунтується на лінеаризації функцій $f_i(x)$. Проаналізуємо модифікацію алгоритму лінеаризації, для збіжності якої не вимагається виконання умов Ліпшица для функцій $f_i(x)$.

Поставимо у відповідність точці x допоміжну задачу

$$\min_{p,\beta} \left\{ \beta + \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle . \ \langle f_i'(x), p \rangle + f_i(x) \leq \beta, \ i \in J_\delta(x) \right\}, \qquad /2/$$

де A – симетрична додатно означена матриця, а

$$J_\delta(x) = \{ i \in J : \ f_i(x) \geq F(x) - \delta \}, \qquad \delta > 0.$$

Розв"язок задачі /2/ та її множники Лагранжа позначимо відповідно через $p(x)$, $\beta(x)$ та $u^i(x)$, $i \in J_\delta(x)$;

$$u^i(x) = 0, \qquad i \notin J_\delta(x).$$

Функція Лагранжа для задачі /2/ має вигляд

$$\mathcal{L}(x, u) = \sum_{i \in J} u^i f_i(x).$$

Позначимо через L та D фактори Холеського для матриці:

$$A = LDL^T,$$

де L – нижня трикутна одинична матриця; D – додатна діагональна матриця; L^T – транспонована L.

Нехай вибрані числа $\sigma > 0$, $S > 1$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1/2$, $c_0 > 0$, $0 < \gamma < 1$ та початкове наближення x_0. Вважатимемо, що

$A_0 = I_n$ / I_n – одинична матриця розмірності n / та задамо довільне правило розрахунку додатно означених симетричних матриць A_k.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка x_k, число c_k та матриця A_k вже побудовані.

I. Розв"язуючи задачу /2/ при $x = x_k$, $A = A_k$, обчислити $p_k = p(x_k)$, $u_k^i = u^i(x_k)$, $i \in I_\delta(x)$.

2. Якщо $\|p_k\| > c_k$ або $F(x_k + p_k) > F(x_0)$, то прийняти $c_{k+1} = c_k$ та перейти до кроку 3. В іншому ж випадку встановити, що $x_{k+1} = x_k + p_k$, $c_{k+1} = \gamma\|p_k\|$ та перейти до кроку 4.

3. Починаючи з $\alpha = 1$, ділити α навпіл до першого виконання нерівності

$$F(x_k + \alpha p_k) \geqslant F(x_k) - \alpha\varepsilon \langle p_k, A_k p_k \rangle.$$

Прийняти $x_{k+1} = x_k + \alpha p_k$.

4. Перерахувати матрицю A_{k+1}. Якщо $\max a_{k+1}^i / \min a_{k+1}^i < S$, то перейти до кроку I. В іншому ж випадку прийняти $A_{k+1} = I_n$ та перейти до кроку I.

Сформулюємо достатні умови збіжності алгоритму.

Т е о р е м а I. Нехай множина $\Omega = \{x : F(x) \leqslant F(x_0)\}$ компактна та існують такі числа $M \geqslant m > 0$ що

$m\|z\|^2 \leqslant \langle z, A_k z \rangle \leqslant M\|z\|^2$, $z \in R^n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Тоді алгоритм генерує послідовність $\{x_k\}$, в довільній граничній точці якої виконуються необхідні умови мінімуму для задачі /I/.

Матриці A_k доцільно будувати на основі квазіньютонівського перерахунку /2/.

Нехай матриця A_k відома. Обчислюємо матрицю

$$A_{k+1} = A_k + \Delta A_k, \qquad /3/$$

де ΔA_k – квазіньютонівська поправка. ΔA_k може бути, наприклад, матрицею бройденівського типу

$$\Delta A_k = \frac{y_k \, y_k^T}{\langle y_k, s_k \rangle} - \frac{A_k s_k s_k^T A_k}{\langle s_k, A_k s_k \rangle} + \theta_k \tau_k v_k v_k^T, \qquad /4/$$

де $y_k = \mathcal{L}'_x(x_{k+1}, u_k) - \mathcal{L}'_x(x_k, u_k)$,

$s_k = x_{k+1} - x_k$, $\tau_k = 1/\langle s_k, A_k s_k \rangle$,

$v_k = y_k/\langle s_k, y_k \rangle - A_k s_k/\langle s_k, A_k s_k \rangle$, $0 \leqslant \theta_k \leqslant 1$.

За допомогою модифікованого LDL^T - розбиття Холеського /4/ будуємо додатно означену матрицю A_{k+1}:

$$A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} L^T_{k+1} = \bar{A}_{k+1} + E_{k+1} , \qquad /5/$$

де E_{k+1} - невід"ємна діагональна матриця.

Т е о р е м а 2. Нехай множина $\Omega = \{x : F(x) \leq F(x_0)\}$ компактна, градієнти $f_i'(x)$, $i \in J$ задовольняють в Ω умову Ліпшиця, а матриці A_k перераховуються за формулами /3/-/5/. Тоді алгоритм генерує послідовність $\{x_k\}$ в довільній граничній точці якої виконуються необхідні умови мінімуму для задачі /I/.

Припустимо тепер, що x_* - єдина точка, в якій виконуються необхідні умови мінімуму, а функції $f_i(x)$, $i \in J$ тричі неперервно диференційовні в околі точки x_*.

Позначимо через J_* множину активних в точці x_* функцій:

$$J_* = \{ i \in J : f_i(x_*) = F(x_*) \} .$$

Вважатимемо, що виконані наступні умови:

I/ вектори $f_i'(x_*) - f_j'(x_*)$, $i,j \in J_*$, $i \neq j$ лінійно незалежні;

2/ $u^i_* = u^i(x_*) > 0$, $i \in J_*$;

3/ $\langle \mathcal{L}''_{xx}(x_*, u_*) p, p \rangle > 0$ для всіх $p \in R^n$, $p \neq 0$.

Т е о р е м а 3. Нехай виконуються умови теореми 2 і припущення I/-3/. Тоді послідовність $\{x_k\}$ наближається до x_* з надлінійною швидкістю.

При практичній реалізації алгоритму доцільно розв"язувати двоїсту задачу до задачі /2/, а також замість перерахунку матриць A_k безпосередньо обчислювати фактори Холеського L_k і D_k /3/.

I. П ш е н и ч н ы й Б.Н. Метод линеаризации. М., I983. 2. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации //Кибернетика. I988. №6. С.66-7I. 3. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации для решения задачи нелинейного программирования //Численные методы и оптимизация. Таллин, I988. С.20I-205. 4. Г и л л Ф., М ю р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация. М., I985.

Стаття надійшла до редколегії I5.I2.9I