тоді початковий розподіл $X = \{x_{ij}\}_{m,n}$ визначається наступним чином $x_{is_i} = 1$ / $i = 1,2,\ldots,m$ /,

$x_{ij} = 0$ / $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$; $(i,j) \neq (i,s_i)$/.

У тому випадку, коли початковий розподіл не є оптимальним, здійснюється перерозподіл файлів, суть якого полягає у наступному.

Для кожного вузла K_j перевіряється умова /5/. Якщо для деякого індекса j ця умова не виконується, то із переповненого вузла K_j здійснюється перерозподіл файлів. При цьому на кожному кроці із вузла K_j завжди перерозподіляється той файл, якому відповідає мінімальне збільшення значення цільової функції. Якщо розподіл файлів із вузла K_j завершений, то цей вузол вважається закритим для перерозподілу файлів, тобто до нього неможна більше поміщати інших файлів, і здійснюється перехід до перерозподілу файлів із іншого переповненого вузла /якщо такий існує/.

Відзначимо, що при побудові математичної моделі схема обробки запитів не використовувалась. Отже, вона може бути обрана довільно.

Стаття надійшла до редколегії 30.09.90

УДК 518:517.948

М.В.Жук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv -\frac{\partial p(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial q(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} + r(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = f(x,y) \qquad /1/$$

при нелінійній однорідній крайовій умові

$$R[u]\big|_\Gamma \equiv \Big[p(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\cos(\nu,x) + q(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\cos(\nu,y) + \sigma(s)u\Big]_\Gamma = 0 \qquad /2/$$

де Γ - межа області D, обмеженої по x прямими $x = a$ і $x = b$, а по y достатньо гладкими кривими $y = g(x)$ і $y = h(x)$, причому $g(x) < h(x)$, ν - зовнішня нормаль до Γ.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(x,y) \in H = L_2(D)$ з нормою $\|f\|^2 = \iint_D f^2(x,y)\,dx\,dy$; $p(x,y,s,t,z)$, $q(x,y,s,t,z)$, $r(x,y,s,t,z)$

вимірні при $(x,y)\in D$, $-\infty<s,t,z<+\infty$ диференційовані за змінними s, t, z, причому

$$\max\left\{\left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|,\left|\frac{\partial q}{\partial s}\right|\right\}\leqslant M_1,\ \max\left\{\left|\frac{\partial r}{\partial t}\right|,\left|\frac{\partial r}{\partial z}\right|,\left|\frac{\partial q}{\partial t}\right|,\left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\right\}\leqslant M_2$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|\leqslant N_1,\ \max\left\{\left|\frac{\partial r}{\partial t}\right|,\left|\frac{\partial r}{\partial z}\right|\right\}\leqslant N_2,\quad M_1, M_2, N_1, N_2 - \text{const}. \qquad /3/$$

Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $p(x,y,0,0,0)=0$, $q(x,y,0,0,0)=0$, $r(x,y,0,0,0)=0$.

Відносно функції $\sigma(s)$ припускаємо, що вона додатна обмежена, тобто $0<\sigma_1\leqslant\sigma(s)\leqslant\sigma_2$.

Введемо допоміжний оператор T_σ, який визначається за формулами

$$T_\sigma u=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y)\right]\Big|_\Gamma=0. \qquad /4/$$

За область визначення $D(T_\sigma)$ оператора T_σ приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x,y)$ у замкнутій області $\bar D$, які задовольняють крайові умови /5/. Із нерівності Фрідріхса / 3 /

$$\iint\limits_D u^2dx\,dy\leqslant C\left\{\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int\limits_\Gamma u^2ds\right\},\qquad u\in D(T_\sigma), \qquad /6/$$

де C - додатна постійна. Отже, оператор T_σ додатно визначений

$$(T_\sigma u,u)=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int\limits_\Gamma u^2ds\geqslant\gamma^2\|u\|^2,\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{C}}>0. \qquad /7/$$

Позначимо через $H_\sigma\subset H$ енергетичний простір оператора T_σ, тобто замикання $D(T_\sigma)$ в матриці

$$[u,v]_\sigma=(T_\sigma u,v)=\iint\limits_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dx\,dy+\int\limits_\Gamma uv\,ds,$$

$$|u|_\sigma^2=[u,u]_\sigma.$$

Можна показати, що функції $u(x,y)$ із H_σ мають перші узагальнені похідні, сумовані із квадратом в D, і ці функції сумовані з квадратом по межі Γ області D.

Із нерівності /7/ внаслідок граничного переходу для довільного $u\in H_\sigma$ отримуємо

$$\|u\|\leqslant\frac{1}{\gamma}|u|_\sigma. \qquad /8/$$

Для довільних $u, v \in H_\sigma$ формально введемо квазібілінійну форму

$$A(u,v)=\iint\limits_D \Big[p\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\frac{\partial v}{\partial x}+q\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\frac{\partial v}{\partial y}+$$

$$+r\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big)v\Big]dxdy+\int \sigma u v\, ds. \qquad /9/$$

Припустимо, що при $(x,y)\in\overline{D}$ Γ і довільних s, t, z справедлива нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t}\xi_1^2+\Big(\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial q}{\partial t}\Big)\xi_1\xi_2+\frac{\partial q}{\partial z}\xi_2^2+\Big(\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial t}\Big)\xi_1\xi_0+$$

$$+\Big(\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\xi_2\xi_0+\frac{\partial r}{\partial s}\xi_0^2\geqslant M(\xi_1^2+\xi_2^2)+N\xi_0^2, \qquad /10/$$

де ξ_0, ξ_1, ξ_2 – довільні дійсні числа, $M=const>0$, $N-const$, причому співвідношення між постійними M, N і γ такі, що для константа μ, яка визначається співвідношенням

$$\mu=\begin{cases} M', & \text{якщо } N\geqslant 0,\\ M'+\dfrac{N}{\gamma^2}, & \text{якщо } N<0,\end{cases} \qquad /11/$$

де $M'=min\{M,\sigma_1\}$, виконується умова $\mu>0$.

Тоді для довільних u, v, $w\in H_\sigma$ аналогічно, як і в праці / 2 /, можна встановити нерівності

$$A(u,u-v)-A(v,u-v)\geqslant \mu|u-v|_\sigma^2; \qquad /12/$$

$$A(u,w)-A(v,w)\leqslant \eta|u-v|_\sigma\,|w|_\sigma, \qquad /13/$$

де $\eta=max\{\eta_1,\sigma_2\}$,

$$\eta_1=\frac{\sqrt{2}M_1}{\gamma}+2M_2+\frac{N_1}{\gamma^2}+\frac{\sqrt{2}N_2}{\gamma}.$$

Узагальненим розв"язком задачі /1/-/2/ називається функція $u(x,y)\in H_\sigma$, для якої виконується тотожність

$$A(u,v)=\iint\limits_D f v\, dxdy \qquad /14/$$

при довільній функції $v(x,y)\in H_\sigma$. Відомо /див., наприклад, /1//, що виконання умов /12/, /13/ забезпечує існування та единість узагальненого розв"язку.

Задачу /I/-/2/ розв"язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k(x,y), \qquad /I5/$$

де лінійно незалежні в проміжку $[g(x), h(x)]$ функції $\varphi_k(x,y)$ вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{X_\ell(x)\varphi_k(x,y)\}\in H_\sigma$ була повною системою лінійно незалежних функцій в H_σ. Шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаємо зі системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)}(Au_n-f)\varphi_i\,dy+\varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,R[u_n]\Big|_{y=g(x)}+\varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,R[u_n]\Big|_{y=h(x)}=0 \qquad /I6/$$

при умовах

$$\int_{g(a)}^{h(a)}R[u_n]\varphi_i\Big|_{x=a}dy=0,\quad \int_{g(b)}^{h(b)}R[u_n]\varphi_i\Big|_{x=b}dy=0,\qquad i=1,2,\dots,n, \qquad /I7/$$

яка у припущенні існування для функцій $\varphi_k(x,y)$ майже всюди перших і других похідних, сумованих з квадратом, а також при умові, що для довільної функції $v(x,y)$, що має майже всюди сумовані з квадратом перші і другі похідні, функції

$$\bar{p}\left(x,y,v,\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right),\qquad \tilde{q}\left(x,y,v,\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right)\in H,$$

де

$$\bar{p}(x,y,s,t,z)=\frac{\partial p(x,y,s,t,z)}{\partial x},\quad \tilde{q}(x,y,s,t,z)=\frac{\partial q(x,y,s,t,z)}{\partial y}$$

зводиться до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно $c_k(x)$.

Назвемо узагальненим розв"язком системи методу Канторовича /I6/-/I7/ функцію $u_n(x,y)\in \dot{H}_n\cap H_\sigma$, що задовольняє тотожності

$$A(u_n,v_n)=\iint_D f\,v_n\,dx\,dy \qquad /I8/$$

при довільній функції $v_n(x,y)\in H_n\cap H_\sigma$.

Покажемо, що узагальнений розв"язок системи /I6/-/I7/ існує та единий.

Для цього до задачі /I/-/2/ застосовуємо метод Бубнова-Гальоркіна, тобто наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$u_n^m(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} c_{k\ell}X_\ell(x)\varphi_k(x,y),$$

а невідомі коефіцієнти C_{kl} визначаємо зі системи

$$A\left(u_n^m, X_j(x)\,\varphi_i(x,y)\right) = \iint_D f\, X_j(x)\,\varphi_i(x,y)\,dx\,dy, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \qquad /19/$$

Система /I9/ зводиться до системи нелінійних алгебраїчних або трансценден..их рівнянь, розв"язок якої існує та єдиний / I /.

Аналогічно, як і в праці / 2 /, можна показати, що послідовність розв"язків $\{u_n^m\}$ системи /I9/ при $m \to \infty$ слабо збігається у просторі H_σ до єдиного узагальненого розв"язку системи методу Канторовича /I6/-/I7/.

Т е о р е м а. Якщо об..еження на вихідні дані задачі /I/-/2/ такі, що виконуються умови /I2/, /I3/, то для довільної функції $f(x,y) \in H$ задача /I/-/2/ має єдиний узагальнений розв"язок $u(x,y) \in H_\sigma$ і при довільному n система методу Канторовича /I6/-/I7/ має єдиний узагальнен.. розв"язок $u_n(x,y) \in H_n \cap H_\sigma$.

I. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М., I974. 2. Ж у к М.В. Исследования быстроты сходимости метода Канторовича для нелинейных дифференциальных уравнений //Укр.мат.журн. I976. Т.28. №2. 3. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., I970.

Стаття надійшла до редколегії 30.09.91

УДК 5I7.946

М.М.Притула

ГАМІЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕКЛУНДА ІНВЕРСНОГО МОДИФІКОВАНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА

При дослідженні задач гідродинаміки, фізики плазми та інших проблем фізики значну роль відіграють спеціальні нелінійні моделі типу інверсного модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза /МКдФ/:

$$\left.\begin{array}{l} u_t = v, \quad v_t = p \\ \quad = v_x + u^2 v \end{array}\right\} = K[u,p,v], \qquad /I/$$

де $K: M \to T(M)^c$ - гладке по Фреше поліноміальне векторне поле на нескінченно вимірному функціональному многовиді $M = C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^1)$, $t \in \mathbb{R}$ - еволюційний параметр, $u(x,t) \in M$. Подібну систему, але