а невідомі коефіцієнти C_{kl} визначаємо зі системи

$$A\left(u_n^m, X_j(x)\varphi_i(x,y)\right) = \iint\limits_D f X_j(x)\varphi_i(x,y)\,dx\,dy, \quad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,n, \\ j=1,2,\ldots,m. \end{array} \qquad /19/$$

Система /I9/ зводиться до системи нелінійних алгебраїчних або трансцендентних рівнянь, розв"язок якої існує та єдиний / I /.

Аналогічно, як і в праці / 2 /, можна показати, що послідовність розв"язків $\{u_n^m\}$ системи /I9/ при $m \to \infty$ слабо збігається у просторі H_σ до единого узагальненого розв"язку системи методу Канторовича /I6/-/I7/.

Т е о р е м а. Якщо обмеження на вихідні дані задачі /I/-/2/ такі, що виконуються умови /I2/, /I3/, то для довільної функції $f(x,y)\in H$ задача /I/-/2/ має єдиний узагальнений розв"язок $u(x,y)\in H_\sigma$ і при довільному n система методу Канторовича /I6/-/I7/ має єдиний узагальнений розв"язок $u_n(x,y)\in H_n \cap H_\sigma$.

I. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М., I974. 2. Ж у к М.В. Исследования быстроты сходимости метода Канторовича для нелинейных дифференциальных уравнений //Укр.мат.журн. I976. Т.28. №2. 3. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., I970.

Стаття надійшла до редколегії 30.09.91

УДК 5I7.946

М.М.Притула

ГАМІЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕКЛУНДА ІНВЕРСНОГО МОДИФІКОВАНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА

При дослідженні задач гідродинаміки, фізики плазми та інших проблем фізики значну роль відіграють спеціальні нелінійні моделі типу інверсного модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза /МКдФ/:

$$\left.\begin{array}{l} u_t = v, \quad v_t = p \\ p_t = u_x + u^2 v \end{array}\right\} = K[u,p,v], \qquad /1/$$

де $K: M \to T(M)$ – гладке по Фреше поліноміальне векторне поле на нескінченно вимірному функціональному многовиді $M = C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$, $t\in\mathbb{R}$ – еволюційний параметр, $u(x,t)\in M$. Подібну систему, але для рівняння КдФ, було розглянуто у працях [2,3]. У [2] аналізується повна інтегрованість по Лаксу інверсного рівняння КдФ. У праці [3] побудовано гамільтонову структуру для відповідних стаціонарних задач, а також для інверсних систем, в яких функцію часу t виконує одна із просторових змінних. Ми ж дослідимо систему /1/ на інтегрованість по Лаксу в рамках градієнтно-голономного алгоритму /1/. Для цього вивчимо спочатку наявність для /1/ ієрархії законів збереження $\gamma_j \in D(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. З цією метою розглянемо асимптотичні по $|\lambda| \to \infty$ розв"язки рівняння Лакса

$$L_K \varphi + \partial\varphi/\partial t = 0, \qquad /2/$$

де L_K – похідна Лі в напрямку векторного поля $K: M \to T(M)$, а

$$\varphi(x,t;\lambda) = (1, b(x,t;\lambda), c(x,t;\lambda))^{\tau} \exp[\lambda^3 x + \lambda t + \partial^{-1}\sigma(x,t;\lambda)]. \qquad /3/$$

Тут $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексний параметр, τ – знак транспонування, причому справедливі асимптотичні розклади при $|\lambda| \to \infty$

$$b(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j\geq 2} b_j[u,\rho,v]\lambda^{-j}, \quad c(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j\geq 1} c_j[u,\rho,v]\lambda^{-j},$$

$$\sigma(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j\geq 1} \sigma_j[u,\rho,v]\lambda^{-j}. \qquad /4/$$

Підставляючи розв"язки /3/ з урахуванням /4/ у рівняння Лакса /2/, отримаємо систему нескінченних рекурентних співвідношень вигляду

$$\begin{aligned}
&\delta_{j,1} + \partial^{-1}\sigma_{j,t} + 2uv b_j - b_{j,x} - b_{j+3} - \sum_k b_{j-k}\sigma_k = 0, \\
&b_{j,t} + \sum_k b_{j-k} b_{k,x} + \sum_k b_{j+3-k} b_k + \sum_{k,s} b_{j-k} b_{k-s}\sigma_s - \\
&-2uv\sum_k b_{j-k} b_k + c_j = 0, \qquad /5/ \\
&c_{j,t} + \sum_k c_{j-k} b_{k,x} + \sum_k c_{j+3-k} b_k + \sum_{k,s} c_{j-k} b_{k-s}\sigma_s - \\
&-2uv\sum_k c_{j-k} b_k + \delta_{j,0} + v^2 b_j = 0,
\end{aligned}$$

де $j \in \mathbb{Z}^+$, δ – дельта-символ Кронекера. Розв"язуючи послідовно рівняння в /5/, знаходимо

3–3036

$$b_1=0,\ c_1=-1,\ \sigma_1=(2/3)up-(1/3)v^2-(1/6)u^4,$$

$$b_2=1,\ c_2=0,\ \sigma_2=-(4/3)uu_x,$$

$$b_3=0,\ c_3=0,\ \sigma_3=(1/27)u^6-(2/9)u^3p-(2/3)u_xv+(1/3)p^2,$$

$$b_4=(1/3)u^2,\ c_4=0,\ \sigma_4=(2/9)u^3u_x,\ \dots \qquad /6/$$

В міру подання /2/ отримаємо, що всі функціонали вигляду $\gamma_j=\int_{x_0}^{x_0+l}dx\,\sigma_j[u,p,v]$, $j\in Z_+$ є для динамічної системи /I/ законами збереження, причому, згідно побудови, функціонально незалежними.

Перейдемо до гамільтонового аналізу динамічної системи /I/ на нескінченно вимірному многовиді M. З цією метою припустимо, що існує такий імплектичний і ньотеровий оператор $\mathcal{L}: T^*(M)\to T(M)$, що справедлива рівність

$$(u,p,v)_t^{\tau}=w_t=-\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,H=K[w], \qquad /7/$$

де функціонал $H=(3/2)\gamma_1=\int_{x_0}^{x_0+l}dx[-up+(1/2)v^2+(1/4)u^4]\in D(M)$ необхідно є законом збереження /I/.

Імплектичний оператор $\mathcal{L}: T^*(M)\to T(M)$ задовольняє умову Картана-Ньотер вигляду $L_K\mathcal{L}=0$, або

$$\mathcal{L}'\cdot K-\mathcal{L}K'^{*}-K'\cdot\mathcal{L}=0. \qquad /8/$$

Для розв"язку рівняння /8/ використано асимптотичний μ -метод /I/ малого параметра. Проводячи послідовно викладки, аналогічні, як у /2/, знайдемо шуканий $\mathcal{L}$ оператор вигляду:

$$\mathcal{L}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & \partial & -u^2\\ 1 & u^2 & 0\end{Vmatrix}.$$

При тотожному виконанні умови /8/ імплектичний оператор $\mathcal{L}$ є ньотеровим.

Аналогічно, розв"язуючи рівняння Картана-Ньотер /8/, знаходимо його другий алгебраїчно незалежний розв"язок $\mu: T^*(M)\to T(M)$

$$
\mathcal{M}=\left\|\begin{array}{c|c|c}
-4v\partial^{-1}v & 4v\partial^{-1}u\partial-4v\partial^{-1}u^2v-6\partial & 2u^2-4v\partial^{-1}\rho \\
\hline
-4\partial u\partial^{-1}v- & 4\partial u\partial^{-1}u\partial-6u^2\partial-6\partial u^2- & 2u^4-4u\partial^{-1}\rho- \\
-4u^2v\partial^{-1}v-6\partial & -4u^2v\partial^{-1}u^2v+4u^2v\partial^{-1}u\partial- & -4u^2v\partial^{-1}\rho \\
 & -4\partial u\partial^{-1}u^2v & \\
\hline
-2u^2-4\rho\partial^{-1}v & -2u^4+4\rho\partial^{-1}u\partial-4\rho\partial^{-1}u^2v & 6\partial-4\rho\partial^{-1}\rho
\end{array}\right\| \qquad /9/
$$

Цей же результат легко отримати за допомогою перетворення Беклунда /I/ динамічної /I/ та інверсної динамічної систем КдФ /2/

$$
\left.\begin{array}{l} u_t=v, \quad v_t=\rho \\ \rho_t=u_x+u^2v \end{array}\right\} \xrightarrow{:B} \left\{\begin{array}{l} \tilde{u}_t=\tilde{v}, \quad v_t=\tilde{\rho} \\ \tilde{\rho}_t=\tilde{u}_x+\tilde{u}\tilde{v} \end{array}\right. ,
$$

де

$$
\left.\begin{array}{l} \alpha v+\tilde{u}-u^2=0, \quad \alpha=\sqrt{6} \\ \alpha\rho+\tilde{v}-2uv=0 \\ \alpha(u_x+u^2v)+\tilde{\rho}-2v-2u\rho=0 \end{array}\right\} = B[u,\rho,v;\tilde{u},\tilde{\rho},\tilde{v}].
$$

Якщо $\tilde{\mathcal{L}}: T^*(M)\to T(M)$ – імплектичний оператор динамічної системи inv -КдФ / 2 /, то

$$
\mathcal{M}=\mathcal{L}B_w'^* B_{\tilde{w}}'^{*-1}\cdot\tilde{\mathcal{L}}^{-1}B_{\tilde{u}}'^{-1}B_u'\mathcal{L},
$$

де $w=(u,\rho,v)^{\tau}\in M$, $\tilde{w}=(\tilde{u},\tilde{\rho},\tilde{v})^{\tau}\in M$ – другий алгебраїчно незалежний розв"язок рівняння Картана-Ньотер /8/, що збігається з виразом /9/.

Використовуючи отримані результати, на основі градієнтно-голономного алгоритму / 2,3 /, можна отримати ізоспектральне подання типу Лакса для моделі inv -МКдФ /I/.

I. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н., Прикарпатський А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы. К., 1987. 2. Самойленко В.Г., Притула Н.Н., Суяров У.С. Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега-де Фриза. К., 1989. 27 с. /Препринт

/АН УССР. Ин-т математики; №71/. 3. Ц а р е в С.П. Гамильтоновость стационарных и обращенных уравнений механики сплошных сред и математической физики //Математические заметки. 1989. Т.46. Вып.1. С.105-111.

Стаття надійшла до редколегії 12.10.91

УДК 517.9

М.М.Притула, В.Г.Самойленко, У.С.Суяров

ГАМІЛЬТОНОВА СТРУКТУРА РІВНЯННЯ ТИПУ БОЛЬЦМАНА-ВЛАСОВА В ПРОСТОРІ БІНАРНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ

1. Нехай $M \simeq T^*\mathbb{R} \oplus T^*\mathbb{R}^2$ – двочастинковий фазовий простір симетричних функцій розподілу Боголюбова / 1,2 / динамічної системи багатьох однакових частинок на осі $\mathbb{R}$. Відповідну дужку Пуассона на M задамо згідно результату роботи / 3 / наступною формулою:

$$\{h,g\} = \Big(\frac{\partial h_1}{\partial p}\frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial p}\frac{\partial h_1}{\partial x}, 2\Big(\frac{\partial h_1}{\partial p_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_2}{\partial p_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\Big) +$$

$$+2\Big(\frac{\partial h_2}{\partial p_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial p_1}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\Big) + \sum_{j=1,2}\Big(\frac{\partial h_2}{\partial p_j}\frac{\partial g_2}{\partial x_j} - \frac{\partial g_2}{\partial p_j}\frac{\partial h_2}{\partial x_j}\Big)\Big)^{\tau}, \qquad /1/$$

де симетричні вектор-функції динамічних змінних $h=(h_1(x,p), h_2(x_1,p_1;x_2,p_2))^{\tau}$, $g=(g_1(x,p), g_2(x_1,p_1;x_2,p_2))^{\tau} \in D(M;\mathbb{R}^2)$; $(x_j,p_j) \in \mathbb{R}^2$, $j=\overline{1,2}$ – відповідно координата і імпульс частинки на осі $\mathbb{R}$. Очевидно, що множина вектор-функцій $D(M;\mathbb{R}^2)$ утворює відносно дужки /1/ алгебру Лі $\mathcal{G}$ над полем $\mathbb{R}$. Нехай $\mathcal{G}^*$ – відповідний спряжений до алгебри Лі $\mathcal{G}$ лінійний простір функціоналів. Тоді по відношенні додатково введеної структури скалярного добутку $(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{G}$ можна згідно теореми Ріса ототожнити $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$, причому вважаємо, що скалярний добуток на $\mathcal{G}$ симетричний, невироджений та інваріантний відносно /1/, тобто для всіх $f,g,h \in D(M;\mathbb{R}^2)$ справедливо

$$(f,g)=(g,f)=\int_{\mathbb{R}}dx\int_{\mathbb{R}}dp\, f_1(x,p)g_1(x,p)+\int_{\mathbb{R}}dx\int_{\mathbb{R}}dp\, f_2(x,p)g_2(x,p), \qquad /2/$$

$$(f,\{g,h\}) = (\{f,g\},h).$$