/АН УССР. Ин-т математики; №71/. 3. Ц а р е в С.П. Гамильтоновость стационарных и обращенных уравнений механики сплошных сред и математической физики //Математические заметки. 1989. Т.46. Вып.1. С.105-111.

Стаття надійшла до редколегії 12.10.91

УДК 517.9

М.М.Притула, В.Г.Самойленко, У.С.Суяров

ГАМІЛЬТОНОВА СТРУКТУРА РІВНЯННЯ ТИПУ БОЛЬЦМАНА-ВЛАСОВА В ПРОСТОРІ БІНАРНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ

1. Нехай $M \simeq T^*\mathbb{R} \oplus T^*\mathbb{R}^2$ – двочастинковий фазовий простір симетричних функцій розподілу Боголюбова / 1,2 / динамічної системи багатьох однакових частинок на осі $\mathbb{R}$. Відповідну дужку Пуассона на M задамо згідно результату роботи / 3 / наступною формулою:

$$\{h,g\} = \Big(\frac{\partial h_1}{\partial p}\frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial p}\frac{\partial h_1}{\partial x},\, 2\Big(\frac{\partial h_1}{\partial p_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_2}{\partial p_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\Big) +$$

$$+2\Big(\frac{\partial h_2}{\partial p_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial p_1}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\Big) + \sum_{j=1,2}\Big(\frac{\partial h_2}{\partial p_j}\frac{\partial g_2}{\partial x_j} - \frac{\partial g_2}{\partial p_1}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\Big)\Big)^{\tau}, \qquad /1/$$

де симетричні вектор-функції динамічних змінних $h = (h_1(x,p), h_2(x_1,p_1;x_2,p_2))^{\tau}$, $g = (g_1(x,p), g_2(x_1,p_1;x_2,p_2))^{\tau} \in D(M;\mathbb{R}^2)$; $(x_j, p_j) \in \mathbb{R}^2$, $j = \overline{1,2}$ – відповідно координата і імпульс частинки на осі $\mathbb{R}$. Очевидно, що множина вектор-функцій $D(M;\mathbb{R}^2)$ утворює відносно дужки /1/ алгебру Лі $\mathcal{G}$ над полем $\mathbb{R}$. Нехай $\mathcal{G}^*$ – відповідний спряжений до алгебри Лі $\mathcal{G}$ лінійний простір функціоналів. Тоді по відношенні додатково введеної структури скалярного добутку $(\cdot\,,\cdot)$ на $\mathcal{G}$ можна згідно теореми Ріса ототожнити $\mathcal{G}^* \cong \mathcal{G}$, причому вважаємо, що скалярний добуток на $\mathcal{G}$ симетричний, невироджений та інваріантний відносно /1/, тобто для всіх $f, g, h \in D(M;\mathbb{R}^2)$ справедливо

$$(f,g) = (g,f) = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dp\, f_1(x,p) g_1(x,p) + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dp\, f_2(x,p) g_2(x,p), \qquad /2/$$

$$(f, \{g,h\}) = (\{f,g\}, h).$$

Якщо $\gamma \in D(\mathcal{G}^*)$ – деякий гладкий по Фреше функціонал на $\mathcal{G}^*$ /не обов"язково лінійний/, то однозначно визначено відображення $\mathrm{grad}: D(\mathcal{G}^*) \to \mathcal{G}$ за допомогою наступної формули:

$$(\mathrm{grad}\,\gamma(f), g) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \gamma(f+\varepsilon g), \qquad /3/$$

де елементи $f, g \in \mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$ – довільні. В силу своєї побудови, очевидно, $\mathrm{grad}\,\gamma(f) \in \mathcal{G}$ – звичайна варіаційна похідна Ейлера функціонала $\gamma \in D(\mathcal{G}^*)$, вирахувана в точці $f \in \mathcal{G}^*$. Надалі для зручності будемо користуватись таким позначенням

$$\mathrm{grad}\,\gamma(f) = \nabla\gamma(f).$$

Визначимо тепер канонічну гамільтонову структуру Лі-Пуассона / 3-5 / $\{\{\cdot,\cdot\}\}$ на многовиді $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$ згідно стандартної формули:

$$\{\{\gamma, \mu\}\} = (f, \{\nabla\gamma(f), \nabla\mu(f)\}) \qquad /4/$$

для будь-яких $\gamma, \mu \in D(\mathcal{G}^*)$. Зміст формули /4/ прояснюється, якщо розглянути коприєднану дію алгебри Лі $\mathcal{G}$ на просторі $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$ у вигляді:

$$df/dt = ad^*_{\nabla\gamma(f)} f; \qquad /5/$$

$t \in \mathbb{R}$ – еволюційний параметр, $\nabla\gamma(f) \in \mathcal{G}$ і $f \in \mathcal{G}^*$ – довільний елемент. Вираз /5/, очевидно, задає на $\mathcal{G}^*$ векторне поле, яке в силу інваріантності скалярного добутку в /2/, еквівалентне наступному комутаторному представленню:

$$df/dt = \{f, \nabla\gamma(f)\}, \quad f \in \mathcal{G}^* \qquad /6/$$

Останнє ж рівняння /6/ згідно формули /4/ еквівалентне стандартному гамільтоновому виразу:

$$df/dt = \{\{\gamma, f\}\}, \quad f \in \mathcal{G}^*, \qquad /7/$$

де функціонал $\gamma \in D(\mathcal{G}^*)$ – відповідна функція Гамільтона. Таким чином, якщо вектор-функція $f = (f_1, f_2) \in D(M; \mathbb{R}^2)$ проінтерпретована нами як вектор одно- і двохчастинкової статистичних функцій розподілу Боголюбова вихідної багаточастинкової динамічної системи з гамільтоніаном $H = \gamma \in D(G_j^*)$, то динамічна система /7/ описує відповідну їх еволюцію в часі при умові, що процедура статистичного її опису фіксує відсутність n-частинкових кореляцій динаміки частинок при $n = 3$. Цим самим, при заданім вихіднім гамільтоніані $H \in D(G_j^*)$ динамічна система /7/ має зміст узагальнених рівнянь Больцмана-Власова в просторі незалежних унарних і бінарних функцій розподілу $f \in D(M; \mathbb{R}^2)$. Зокрема, якщо вибрати / 5 /

$$H = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} p^2 dp \int_{\mathbb{R}} dx\, f_1(x,p) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx\, +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} dp_1 \int_{\mathbb{R}} dp_2\, f_2(x_1, p_1; x_2, p_2)\, V(x_1 - x_2; p_1 + p_2), \qquad /8/$$

то отримаємо з /7/ узагальнені рівняння Больцмана-Власова на вектор $f \in G_j^*$

$$\frac{df_1}{dt} = -\left\{\frac{p^2}{2}, f_1\right\}^{(1)} - \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} dp_2 \left\{V, f_2\right\}^{(1)},$$

$$\frac{df_2}{dt} = -\left\{\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}, f_2\right\}^{(2)} - \left\{V, f_2\right\}^{(2)} - \qquad /9/$$

$$- \int_{\mathbb{R}} dx_3 \int_{\mathbb{R}} dp_3 \left\{f_3((x_1,p_1),(x_2,p_2),(x_3,p_3)), V(x_1-x_3; p_1+p_3) + V(x_2-x_3; p_2+p_3)\right\}^{(3)},$$

де $f_3(z_1, z_2, z_3) = f_1(z_1) f_1(z_2) f_1(z_3) + f_1(z_1) g_2(z_2, z_3) + f_1(z_2) g_2(z_1, z_3) +$

$$+ f_1(z_3) g_2(z_1, z_2),\quad g_2(z_i, z_j) = f_2(z_i, z_j) - f_1(z_i) f_1(z_j),$$

$$z_j = (x_j, p_j)^{\tau} \in M, \quad i, j = \overline{1,3},$$

а $\{\cdot,\cdot\}^{(j)}$, $j = \overline{1,3}$ – відповідна канонічна дужка Пуассона на фазовім просторі $T^*\mathbb{R}^j$, $j = \overline{1,2}$. Система рівнянь /9/ замкнена і становить зручний об"єкт для дослідження кінетичних явищ у вихідній динамічній багаточастинковій системі, зокрема, для побудови нових рівнянь гідродинаміки, що є актуальною задачею теорії динамічних систем і її застосувань.

1. А х и е з е р А.И., П е л е т м и н с к и й С.В. Методы статистической физики. М., 1977. 2. Б о г о л ю б о в Н.Н., Б о г о л ю б о в Н.Н. Введение в квантовую статистическую механику. М., 1984. 3. Б о г о л ю б о в Н.Н., П р и к а р п а т с к и й А.К. Квантовый метод производящих функционалов Боголюбова //Физика элементарных частиц и атомные ядра. Т.17. №4. С.799-827.
4. Б о г о л ю б о в Н.Н., П р и к а р п а т с к и й А.К., С а м о й л е н к о В.Г. Гамильтонова структура гидродинамических уравнений

типа Бенни и ассоциированных с ними уравнений Больцмана-Власова на оси. К., 1991. 43 с. /Препринт /АН Украины. Ин-т математики; № 25/. 5. П р и к а р п а т с к и й А.К., М и к и т ю к И.В. Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. К., 1991.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.91

УДК 519.21

І.Д.Квіт

СПОДІВАНІ ТА ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ

Нехай абсолютно неперервна випадкова змінна ξ має функцію розподілу ймовірностей $F(x)=P\{\xi \leq x\}$, $-\infty < x < \infty$. Тоді

$$P\{a_l < \xi \leq a_u\} = F(a_u)-F(a_l),\ P\{\xi \leq a_u\} = F(a_u),\ P\{\xi > a_l\} = 1-F(a_l), \quad /1/$$

де a_l - нижня, a_u - верхня межі відповідної пропорції популяції ξ. Три числа /1/ сталі та відповідно виражають шанси того, що змінна ξ потрапить на двосторонній інтервал $(a_l, a_u]$, на односторонній нижній інтервал $(-\infty, a_u]$ та на односторонній верхній інтервал (a_l, ∞).

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ вибірка незалежних спостережень над популяцією ξ, керованою розподілом $F(x)$, залежним від невідомих параметрів. Тоді межі $a_l = a_l(x_1, \ldots, x_n)$ та $a_u = a_u(x_1, \ldots, x_n)$, а також інтервали $(a_l, a_u]$, $(-\infty, a_u]$, (a_l, ∞) - випадкові, і, значить, вирази /1/ - випадкові змінні, що набувають значення між нулем і одиницею. Для випадкових змінних /1/ можна розглядати точкові або інтервальні оцінки.

1. Зручною точковою оцінкою випадкових змінних /1/ є сподівання

$$E[F(a_u)-F(a_l)],\quad E[F(a_u)],\quad E[1-F(a_l)]. \quad /2/$$

Числа /2/ містяться між 0 та 1. Якщо, наприклад,

$$E[F(a_u)-F(a_l)] = \beta, \qquad 0 < \beta < 1, \quad /3/$$

то двосторонній β -сподіваний інтервал $(a_l, a_u]$ в середньому накриває пропорцію β популяції ξ. Аналогічно отримуємо