типа Бенни и ассоциированных с ними уравнений Больцмана-Власова на оси. К., 1991. 43 с. /Препринт /АН Украины. Ин-т математики; № 25/. 5. Прикарпатский А.К., Микитюк И.В. Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. К., 1991.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.91

УДК 519.21

І.Д.Квіт

СПОДІВАНІ ТА ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ

Нехай абсолютно неперервна випадкова змінна ξ має функцію розподілу ймовірностей $F(x)=P\{\xi \leq x\}$, $-\infty < x < \infty$. Тоді

$$P\{a_l < \xi \leq a_u\} = F(a_u)-F(a_l),\ P\{\xi \leq a_u\} = F(a_u),\ P\{\xi > a_l\} = 1-F(a_l), \qquad /1/$$

де a_l - нижня, a_u - верхня межі відповідної пропорції популяції ξ. Три числа /1/ сталі та відповідно виражають шанси того, що змінна ξ потрапить на двосторонній інтервал $(a_l, a_u]$, на односторонній нижній інтервал $(-\infty, a_u]$ та на односторонній верхній інтервал (a_l, ∞).

Нехай $x_1, \dots, x_n$ вибірка незалежних спостережень над популяцією ξ, керованою розподілом $F(x)$, залежним від невідомих параметрів. Тоді межі $a_l = a_l(x_1, \dots, x_n)$ та $a_u = a_u(x_1, \dots, x_n)$, а також інтервали $(a_l, a_u]$, $(-\infty, a_u]$, (a_l, ∞) - випадкові, і, значить, вирази /1/ - випадкові змінні, що набувають значення між нулем і одиницею. Для випадкових змінних /1/ можна розглядати точкові або інтервальні оцінки.

1. Зручною точковою оцінкою випадкових змінних /1/ є сподівання

$$E[F(a_u)-F(a_l)],\quad E[F(a_u)],\quad E[1-F(a_l)]. \qquad /2/$$

Числа /2/ містяться між 0 та 1. Якщо, наприклад,

$$E[F(a_u)-F(a_l)]=\beta, \qquad 0<\beta<1, \qquad /3/$$

то двосторонній β -сподіваний інтервал $(a_l, a_u]$ в середньому накриває пропорцію β популяції ξ. Аналогічно отримуємо односторонній нижній $(-\infty, a_u]$ та верхній (a_l, ∞) β -сподівані ін.ервали

$$E[F(a_u)] = \beta, \qquad E[1 - F(a_l)] = \beta. \qquad /4/$$

2. Інтервальні оцінки випадкових змінних /I/ зручно виражати відповідно співвідношеннями

$$P\{F(a_u) - F(a_l) \geq \beta\} = \gamma, \; P\{F(a_u) \geq \beta\} \gamma, \; P\{1 - F(a_l) \geq \beta\} = \gamma, \qquad /5/$$

$$(0 < \beta, \; \gamma > 1).$$

Перше співвідношення /5/ вказує на те, що з довір"ям γ двосторонній інтервал $(a_l, a_u]$ накриває принаймні пропорцію β популяції ξ. Двосторонній інтервал $(a_l, a_u]$ називається γ -довірчим з β -вмістом інтервалом. Аналогічно два наступні співвідношення /5/ визначають односторонній відповідно нижній γ -довірчий з β -вмістом $(-\infty, a_u]$ та верхній γ -довірчий з β -вмістом (a_l, ∞) інтервали.

3. Залежно від розподілу та його параметрів на основі вибірки потрібно вказати спосіб знаходження β -сподіваних і γ -довірчих з β -вмістом інтервалів. Для ілюстрації цього розглянемо нормальну популяцію ξ з параметрами локації a та масштабу σ

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < x < \infty, (-\infty < a < \infty, \sigma > 0). \qquad /6/$$

На основі вибірки $x_1, \ldots, x_n$ методом максимальної правдоподібності дістаємо оцінки параметрів

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv \bar{x}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \equiv s^2. \qquad /7/$$

Нехай

$$a_l = \bar{x} - ks, \qquad a_u = \bar{x} + ks,$$

де k - додатна стала. У 1941 р. Вілкс /порівн. [2]/ довів, що для нормальної популяції /6/ у співвідношенні

$$E[F(x + ks) - F(x - ks)] = \beta$$

стала

$$k = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \; t\left(n-1; \frac{1+\beta}{2}\right), \qquad /8/$$

де $t(n-1; \frac{1+\beta}{2})$ - квантиль порядку $\frac{1+\beta}{2}$ розподілу Ст"юдента з $df = n-1$ ступенями вільності. Стала k не залежить від a або σ^2. З /8/ видно, що k спадна функція від n. Подамо значення k для деяких $df = n-1$ та β /вивід I/:

$df \backslash \beta$	0,90	0,95	0,99
2	3,37I7	4,9683	II,460I
5	2,I764	2,7766	4,3552
I0	I,893I	2,3272	3,3I02
40	I,7043	2,0456	2,7373
500	I,6495	I,9667	2,5883

При обсязі вибірки n = 4I з нормальної популяції дістаємо наближено двосторонній 0,90 – сподіваний інтервал /$\bar{x}$ – I,7s ; $\bar{x}$ + I,7s/, двосторонній 0,95 – сподіваний інтервал /$\bar{x}$ – 2s ; $\bar{x}$ + 2s/ та двосторонній 0,99 – сподіваний інтервал /$\bar{x}$ – 2,7s ; $\bar{x}$ + 2,7s/. При заданих β та k можна знайти n. Наприклад, при β = 0,95 та k = 3 знаходимо n = 5. Таким чином, для нормальної популяції двосторонній β -сподіваний інтервал має вигляд

$$(a_L, a_u] = (\bar{x} - ks,\ \bar{x} + ks], \qquad /9/$$

де $\bar{x}$ і s задаються виразами /7/, а число k формулою /8/. Аналогічно дістаємо односторонні нижній $(-\infty, \bar{x} + ks]$ та верхній $(\bar{x} - ks, \infty)$ β -сподівані інтервали, де відповідно

$$k = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\, t(n-1;\beta), \qquad k = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\, t(n-1;\beta). \qquad /10/$$

Визначення інтервалів зі співвідношень /5/, навіть для нормальної популяції, значно складніше, ніж зі співвідношень /3/ і /4/. Хоча інтервал має вигляд /9/, чи $(-\infty, \bar{x} + ks]$ або $(\bar{x} - ks, \infty)$, вся трудність полягає у визначенні константи k. Сталу k вперше визначили в I946 р. Вальд і Вольфовиц /порівн. [I,2]/. Існують обширні значення сталої k для різних ступенів вільності, β і γ. Подамо значення k при df = I0 з праці [I] при заданих β /вивід 2/:

$\gamma \backslash \beta$	0,90	0,95	0,99
0,90	2,485	2,953	3,863
0,95	2,768	3,288	4,298
0,99	3,448	4,094	5,347

Розглянемо числовий приклад. Нехай
3,56; 4,0I; 3,09; 4,44; 0,9I; 7,09; 4,9I; 5,43; 2,57; I,92; 6,08 – вибірка з нормальної популяції. Тоді середнє дорівнює 4, а стандарт

І,84. При β = 0,90 та df = І0 з виводу 1 знаходимо k = І,893І. Отже, 0,90 – сподіваний інтервал /9/ набуває вигляду 4±І,893І ·І,84= = /0,5І67; 7,4833/. При $\beta = \gamma$ = 0,90 та df = І0 з виводу 2 знаходимо k = 2,485. Таким чином, 0,90 – довірчий з 0,90 вмістом інтервал /9/ набуває вигляду 4 ± 2,485 · І,84 = /–0,5724; 8,5724/.

4. Зазначимо, що проведені міркування про визначення β -сподіваного інтервалу та γ -довірчого з β -вмістом інтервалу для нормальної популяції переносяться на випадок логарифмічно нормальної популяції. Справді, якщо логнормальна популяція η з параметром масштабу τ і параметром форми ν має густину

$$g(y)=\frac{1}{\nu y\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\ln\frac{y}{\tau})^2}{2\nu^2}},\quad 0<y<\infty,\quad (\tau>0,\ \nu>0),$$

то $\ln\eta$ має нормальну функцію розподілу /6/ з параметром локації $a=\ln\tau$ і параметром масштабу $\sigma=\nu$. Тому, якщо $y_1,\ldots,y_n$ – вибірка з логнормальної популяції, то $x_1=\ln y_1,\ldots,x_n=\ln y_n$ – вибірка з нормальної популяції, для якої знаходимо β -сподівані інтервали $(a_l, a_u]$, $(-\infty, a_u]$ та (a_l,∞). Відповідні β -сподівані інтервали для логнормальної популяції будуть $(e^{a_l}, e^{a_u}]$, $(0, e^{a_u}]$ та (e^{a_l},∞). Аналогічно знаходимо γ -довірчі з β -вмістом інтервали.

1. Beckman R.J., Tietjen G.L. Two-Sided Tolerance Limits for Balanced Random-Effects Anova Model // Technometrics. 1989. V. 31. P. 185-197. 2. Mee R.W. Normal Distribution Tolerance Limits for Stratified Random Samples // Technometrics. 1989. V. 31. P. 99-105.

Стаття надійшла до редколегії І2.09.89