УДК 519.21

Р.Т.Мисак

МАТРИЧНА РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ МІНІМАКСНОЇ ОЦІНКИ

Нехай задана лінійна модель обробки результатів спостережень

$$\vec{y} = X\vec{c} + \vec{\varepsilon}\,, \qquad /1/$$

де $\vec{y}$ – n-вимірний вектор спостережень; $X = (x_{i,j})$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$ – задана матриця; $\vec{c}$ – невідомий m-вимірний вектор; $\vec{\varepsilon}$ – n-вимірний випадковий вектор похибок; $M\vec{\varepsilon} = 0$, $M\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}' = R$.

Будемо вважати, що вектор $\vec{c}$ належить деякій вимірній області Ω_γ

$$\Omega_\gamma = \{\vec{c} : (D\vec{c}, \vec{c}) \le \gamma\},$$

де D – додатно визначена симетрична матриця розмірності $m \times m$; γ – дійсний параметр, $0 < \gamma < \infty$.

Розглянемо мінімаксну або S-оцінку [1] невідомого вектора $\vec{c}$

$$\vec{c}^{\,*} = T\vec{y} + \vec{t}\,,$$

де $\vec{t} = 0$;

$$T = \gamma D^{-1} X' (X D^{-1} X' \gamma + R)^{-1}.$$

Без втрати загальності можна прийняти $D = I$.

У випадку, коли матриця $X X'\gamma + R$ вироджена, проведемо матричну регуляризацію [1,2] із використанням додатно визначеної симетричної матриці A розмірності $m \times m$. Отримаємо регуляризовану оцінку

$$\hat{\vec{c}} = \hat{T}\vec{y}\,, \qquad /2/$$

де $\hat{T} = \gamma X' (X X'\gamma + R + A)^{-1}$, $(X X'\gamma + R + A)^{-1} > 0$.

При чому матриця-регуляризатор A повинна мінімізувати деякий критерій якості оцінки невідомого вектора $\vec{c}$. Розглянемо такий критерій якості $M\|\hat{\vec{c}} - \vec{c}\|^2$, де $\|\vec{c}\| = (\vec{c}, \vec{c})^{1/2}$.

Позначимо через L множину додатно визначених матриць розмірності $m \times n$.

Т е о р е м а. Якщо R і D – невироджені матриці, тоді

$$\min_{A \in L} \max_{\vec{c} \in \Omega_\gamma} M\|\hat{\vec{c}} - \vec{c}\|^2 = \gamma \lambda_1 \{(\hat{T}X - I)'(\hat{T}X - I)\} + Sp\,\hat{T} R \hat{T}', \qquad /3/$$

де λ_1 – максимальне власне число. Якщо λ_1 однократне для всіх $\hat{A} \in \hat{G}$ де G – множина розв"язків рівняння [3], тоді його розв"язками будуть розв"язки рівняння

$$(R+\hat{A})(\gamma X X'+R+\hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' - R(X X'\gamma+R+\hat{A})^{-1} X X' = 0, \qquad /4/$$

де $\vec{e}$ – власний вектор, що відповідає власному числу λ_1.

Доведення. Розглянемо

$$M\|\hat{\vec{c}} - \vec{c}\|^2 = M\|\hat{T}\vec{y} - \vec{c}\|^2 - \|(\hat{T}X - I)\vec{c}\|^2 + Sp\, \hat{T} R \hat{T}'.$$

Використовуючи співвідношення Реллея [3], отримаємо

$$\max_{\vec{c} \in \Omega_\gamma} M\|\hat{\vec{c}} - \vec{c}\|^2 = \gamma\lambda_1\{(\hat{T}X - I)'(\hat{T}X - I)\} =$$

$$= \gamma\lambda_1\{(\gamma X'(X X'\gamma + R + A)^{-1} X - I)^2\}.$$

Нехай λ_1 однократне власне число, тоді, використовуючи формули збурень для власних чисел [4], можна записати

$$(\partial/\partial t)(\gamma\lambda_1\{(\gamma X'(X X'\gamma + R + \hat{A} + t\,\theta)^{-1} X - I)^2\} +$$

$$+ Sp(\gamma^2 X'(X X'\gamma + R + \hat{A} + t\,\theta)^{-1} R (X X'\gamma + R + \hat{A} + t\,\theta)^{-1} X)\}_{t=0} = 0,$$

де θ – довільна додатно визначена симетрична матриця, t – дійсний параметр.

Звідси отримаємо

$$\gamma((-\gamma^2 X'(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1}\theta (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X X' (X X'\gamma +$$
$$+ R + \hat{A})^{-1} X - \gamma^2 X'(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X X' (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1}\theta \times$$
$$\times (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X + 2\gamma X'(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1}\theta (X X'\gamma +$$
$$+ R + \hat{A})^{-1} X)\vec{e}_1', \vec{e}_1) - \gamma^2 Sp(X'(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1}\theta (X X'\gamma +$$
$$+ R + \hat{A})^{-1} R (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X + X'(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} R \times$$
$$\times (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1}\theta (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X) = 0.$$

Тоді

$$Sp(\theta(-\gamma(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X X'(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' \times$$
$$\times (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} + (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' (X X'\gamma +$$
$$+ R + \hat{A})^{-1} - (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} R (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X X' \times$$
$$\times (X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1})) = 0.$$

Звідси, враховуючи довільність матриці θ, випливає

$$-\gamma X X'(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' + X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' - R(X X'\gamma +$$
$$+ R + \hat{A})^{-1} X X' = 0.$$

Остаточно будемо мати

$$(R + \hat{A})(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} X \vec{e}_1 \vec{e}_1' X' - R(X X'\gamma + R + \hat{A})^{-1} = 0.$$

5-3036

Таким чином, ми отримали спектральне рівняння для визначення оптимальної матриці-регуляризатора $\hat{A}$, яке в загальному випадку не має розв"язків в явному вигляді.

І. Г и р к о В.Л. Теория эмпирических систем уравнений. К., 1990. 2. Г и р к о В.Л., М ы с а к Р.Т., О н ш а Ю.М. Стационарное уравнение Риккати для матрицы-регуляризатора в методе наименьших квадратов //Вычисл. и прикл. математика. 1988. Вып. 64. С.135-137. 3. Е р м а к о в С.М., Ж и г л я в с к и й А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. М., 1972. 4. К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.91

УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

ЗБІЖНІСТЬ ОДНОГО РЕКУРСИВНОГО МЕТОДУ З ПОСЛІДОВНОЮ АПРОКСИМАЦІЄЮ ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА

Для розв"язування нелінійного рівняння

$$P(x) = 0 \qquad /1/$$

в праці [1] побудовано і досліджено рекурсивний ітераційний процес на базі методу зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$. Метод [1], як і інші методи ньютонівського типу, вимагає знаходити на кожному кроці ітерацій обернений оператор /розв"язувати лінійні операторні рівняння/, що створює труднощі при їх чисельній реалізації.

Одним із способів підвищення ефективності методів ньютонівського типу є застосування апроксимації оберненого оператора. Використовуючи ідею послідовної апроксимації оберненого оператора [2], побудуємо модифікацію методу [1]:

$$\begin{aligned}
&x^0 = \bar{x}^{(0)} \\
&z_n^{(0)} = x^{(n)} \\
&z_n^{(i+1)} = z_n^{(i)} - A_n P(z_n^{(i)}), \qquad i = 0, 1, \dots, t-1 \\
&x^{(n+1)} = z_n^{(t)}, \\
&\bar{x}^{(n+1)} = x^{(n+1)} - \frac{1}{2} A_n P(x^{(n+1)}),
\end{aligned} \qquad /2/$$