Таким чином, ми отримали спектральне рівняння для визначення оптимальної матриці-регуляризатора $\hat{A}$, яке в загальному випадку не має розв"язків в явному вигляді.

І. Г и р к о В.Л. Теория эмпирических систем уравнений. К., 1990. 2. Г и р к о В.Л., М ы с а к Р.Т., О н ш а Ю.М. Стационарное уравнение Риккати для матрицы-регуляризатора в методе наименьших квадратов //Вычисл. и прикл. математика. 1988. Вып. 64. С.135-137. 3. Е р м а к о в С.М., Ж и г л я в с к и й А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. М., 1972. 4. К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.91

УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

ЗБІЖНІСТЬ ОДНОГО РЕКУРСИВНОГО МЕТОДУ З ПОСЛІДОВНОЮ АПРОКСИМАЦІЄЮ ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА

Для розв"язування нелінійного рівняння

$$P(x) = 0 \qquad /1/$$

в праці [1] побудовано і досліджено рекурсивний ітераційний процес на базі методу зі швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$. Метод [1], як і інші методи ньютонівського типу, вимагає знаходити на кожному кроці ітерацій обернений оператор /розв"язувати лінійні операторні рівняння/, що створює труднощі при їх чисельній реалізації.

Одним із способів підвищення ефективності методів ньютонівського типу є застосування апроксимації оберненого оператора. Використовуючи ідею послідовної апроксимації оберненого оператора [2], побудуємо модифікацію методу [1]:

$$\begin{aligned} &x^0 = \bar{x}^{(0)} \\ &z_n^{(0)} = x^{(n)} \\ &z_n^{(i+1)} = z_n^{(i)} - A_n P(z_n^{(i)}), \qquad i = 0, 1, \ldots, t-1 \\ &x^{(n+1)} = z_n^{(t)}, \\ &\bar{x}^{(n+1)} = x^{(n+1)} - \frac{1}{2} A_n P(x^{(n+1)}), \end{aligned} \qquad /2/$$

$$A_{n+1}^{(0)} = A_n\,,\quad A_{n+1}^{(s+1)} = A_{n+1}^{(s)}\left(2E - P'(\bar{x}^{(n+1)})A_{n+1}^{(s)}\right),\quad s = 0,1,\ldots,K-1\,,$$

$$A_{n+1} = A_{n+1}^{(K)}\,,\qquad n = 0,1,\ldots,$$

де x^*, A_0 - відповідно початкові наближення до точного розв"язку x^* рівняння /I/ та оберненого оператора $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$. Відмітимо, в методі /2/ для обчислення оберненого оператора використовується ітераційний рекурсивний процес.

Одержимо достатні умови й оцінку швидкості збіжності методу /2/.

Т е о р е м а. Нехай: I/ рівняння /I/ має розв"язок x^* та існує $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$, причому $\|A^*\| \leq B$; 2/ у сфері

$S = \{x : \|x - x^*\| \leq r_0\}$ $\quad \|P''(x)\| \leq L$;

3/ $\|P'(x^*)\| \leq C$;

4/ $h_0 = max\{K_0, M_0, D_0\} < \frac{1}{r_0}$, $r_0 = max\{\|x^* - x^{(0)}\|, \|x^* - \bar{x}^{(0)}\|, \|A^* - A_0\|\}$,

де

$$K_0 = C + \frac{3}{2}B\alpha + \frac{3}{2}Lr_0\,,$$

$$M_0^t = K_0^t\left[\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}Cr_0 + \frac{3}{4}BLr_0 + \frac{3}{4}B\alpha r_0^2\right],$$

$$D_0^{t_0} = D_0^{(K)},\qquad t_0 + 1 = min\,(t+1, 2^K)\,,$$

$$D_0^{(i)} = (C + \alpha r_0)(D_0^{(i-1)})^2 + D_0^{(i-1)}\cdot 2BLM_0^{t+1-2^{i-1}} + LB^2M_0^{t+1-2^i}\,,$$

$$D_0 = 1\,,\quad i = 1,2,\ldots,K.$$

Тоді послідовності $\{x^{(n)}\}$, $\{\bar{x}^{(n)}\}$, A_n збігаються відповідно до x^* і A^*, причому справедлива оцінка

$$r_n = max\{\|x^* - x^{(n)}\|, \|x^* - \bar{x}^{(n)}\|, \|A^* - A_n\|\} \leq (h_0r_0)^{(t_0+1)^n - 1}\cdot r_0 \qquad /3/$$

Доведення здійснимо за індукцією. Покажемо, що оцінка /3/ справедлива при n =I. Із /2/ на основі тотожних перетворень і формули Тейлора одержимо

$$x^* - z_n^{(i)} = x^* - z_n^{(i-1)} + A_nP(z_n^{(i-1)}) = x^* - z_n^{(i-1)} - A_n[P'(z_n^{(i-1)})\times$$

$$\times(x^* - z_n^{(i-1)}) + \int_0^1 P''(z_n^{(i-1)} + \tau(x^* - z_n^{(i-1)}))(1-\tau)(x^* - z_n^{(i-1)})^2 d\tau \qquad /4/$$

Оскільки

$$E - A_n P'(z_n^{(i-1)}) = (A^* - A_n) P'(x^*) + A_n \left(P'(x^*) - P'(z_n^{(i-1)}) \right) \qquad /5/$$

та

$$\| A_n \| \leqslant \| A^* \| + \| A^* - A_n \| \leqslant B + \| A^* - A_n \|, \qquad /6/$$

то, використовуючи умови 2/, 3/ теореми і /4/ маємо

$$\| x^* - z_n^{(i)} \| \leqslant \left(\| A^* - A_n \| \cdot C + (B + \| A^* - A_n \|) L \, \| x^* - z_n^{(i-2)} \| \right) \times$$

$$\times \| x^* - z_n^{(i-1)} \| + \frac{1}{2} (B + \| A^* - A_n \|) L \, \| x^* - z_n^{(i-1)} \|^2 \leqslant \gamma_n^{(i-1)} \| x^* - z_n^{(i-1)} \|, \qquad /7/$$

де

$$\gamma_n^{(i-1)} = \| A^* - A_n \| C + \frac{3}{2} BL \| x^* - z_n^{(i-1)} \| + \frac{3}{2} L \| A^* - A_n \| \, \| x^* - z_n^{(i-1)} \|, \qquad /8/$$

$$i = 0, 1, \ldots, t.$$

Враховуючи /7/, /8/ запишемо

$$\| x^* - z_n^{(1)} \| \leqslant \gamma_n^{(0)} \| x^* - x^{(n)} \|,$$

$$\| x^* - z_n^{(2)} \| \leqslant \gamma_n^{(1)} \| x^* - z_n^{(1)} \| \leqslant \gamma_n^{(1)} \cdot \gamma_n^{(0)} \| x^* - x^{(n)} \|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\| x^* - z_n^{(t)} \| \leqslant \gamma_n^{(t-1)} \cdots \gamma_n^{(1)} \cdot \gamma_n^{(0)} \| x^* - x^{(n)} \|. \qquad /9/$$

Із /9/ з урахуванням /2/ маємо

$$\| x^* - x^{(n+1)} \| \leqslant \gamma_n^{(t-1)} \cdots \gamma_n^{(1)} \cdot \gamma^{(0)} \| x^* - x^{(n)} \|. \qquad /10/$$

На основі /2/, формули Тейлора та тотожних перетворень одержимо

$$x^* - \bar{x}^{(n+1)} = x^* - x^{(n+1)} + \frac{1}{2} A_n P(x^{(n+1)}) = x^* - x^{(n+1)} + \frac{1}{2} A_n \left[P'(x^{(n+1)}) \times \right.$$

$$\left. \times (x^* - x^{(n+1)}) + \int_0^1 P''(x^{(n+1)} + \tau (x^* - x^{(n+1)})) (1-\tau) (x^* - x^{(n+1)})^2 d\tau. \right. \qquad /11/$$

Враховуючи умови теореми та тотожні перетворення виразу

$$E - \frac{1}{2} A_n P'(x^{(n+1)}) = \frac{1}{2} E + \frac{1}{2} A^* P'(x^*) - \frac{1}{2} A_n P'(x^{(n+1)}) =$$

$$= \frac{1}{2} E + \frac{1}{2} (A^* - A_n) P'(x^*) + \frac{1}{2} A_n \left[P'(x^*) - P'(x^{(n+1)}) \right]. \qquad /12/$$

Із /11/ маємо оцінку:

$$\|x^*-x^{(n+1)}\| \leq \Big\{\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}C\|A^*-A_n\| + \frac{1}{2}(B+\|A^*-A_n\|)L\|x^*-x^{(n+1)}\| +$$
$$+\frac{1}{4}L(B+\|A^*-A_n\|)\|x^*-x^{(n+1)}\|\Big\}\|x^*-x^{(n+1)}\| \leq \Big[\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}C\|A^*-A_n\| +$$
$$+\frac{3}{4}BL\|x^*-x^{(n+1)}\| + \frac{3}{4}L\|A^*-A_n\|\cdot\|x^*-x^{(n+1)}\|\Big]\cdot\|x^*-x^{(n+1)}\|. \qquad /13/$$

Тепер оцінимо $\|A^*-A_{n+1}\|$. Для цього на основі /2/ запишемо

$$A^*-A_{n+1}^{(s+1)} = A^*-A_{n+1}^{(s)}(2E-P'(\bar{x}^{(n+1)})A_{n+2}^{(s)}) = A^*-A_{n+1}^{(s)}\big[E+P'(x^*)(A^*-A_{n+1}^{(s)})+$$
$$+(P'(x^*)-P'(\bar{x}^{(n+1)}))A_{n+1}^{(s)}\big] = (A^*-A_{n+1}^{(s)})\cdot P'(x^*)(A^*-A_{n+1}^{(s)}) - A_{n+1}^{(s)}\big[P'(x^*)-$$
$$-P'(\bar{x}^{(n+1)})\big]A_{n+1}^{(s)}, \qquad s=0,1,\dots,k-1. \qquad /14/$$

Оскільки

$$\|A_{n+1}^{(s)}\| \leq \|A^*\| + \|A^*-A_{n+1}^{(s)}\| \leq B + \|A^*-A_{n+1}^{(s)}\|, \qquad /15/$$

то з урахуванням умов теореми із /14/ наявна оцінка

$$\|A^*-A_{n+1}^{(s+1)}\| \leq \|A^*-A_{n+1}^{(s)}\|^2 C + (B+\|A^*-A_{n+1}^{(s)}\|)^2 L\|x^*-\bar{x}^{(n+1)}\|. \qquad /16/$$

Доведемо тепер правильність оцінки /3/ при $n=1$. Для цього із /10/ запишемо

$$\|x^*-x^{(1)}\| \leq \gamma_0^{(t-1)}\cdots\gamma_0^{(1)}\cdot\gamma_0^{(0)}\|x^*-x^{(0)}\|,$$

де

$$\gamma_0^{(0)} = \|A^*-A_0\|C + \frac{3}{2}BL\|x^*-x^{(0)}\| + \frac{3}{2}L\|A^*-A_0\|\cdot\|x^*-x^{(0)}\| \leq K_0 r_0,$$
$$\gamma_0^{(1)} = C\|A^*-A_0\| + \frac{3}{2}BL\gamma_0^{(0)}\|x^*-x^{(0)}\| + \frac{3}{2}L\|A^*-A_0\|\gamma_0^{(0)}\|x^*-x^{(0)}\| \leq K_0 r_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_0^{(t-1)} \leq K_0 r_0. \qquad /17/$$

Отже,

$$\|x^*-x^{(1)}\| \leq (K_0 r_0)^t r_0.$$

Із умови теореми /4/ та оцінки /13/ при $n=0$ маємо

$$\|x^*-\bar{x}^{(1)}\| \leq \Big[\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}Cr_0 + \frac{3}{4}BL(K_0r_0)^t r_0 + \frac{3}{4}BLr_0(K_0r_0)^t r_0\Big]\times$$
$$\times(K_0r_0)^t r_0 \leq M_0^t r_0^{t+1} = (M_0r_0)^t r_0. \qquad /18/$$

На основі /І6/ та умови /4/ теореми одержимо

$$\|A^* - A_1\| \leqslant D_0^{(\kappa)} r_0^{t_0+1} = (D_0 r_0)^{t_0} r_0 . \qquad /I9/$$

Таким чином, із /І7/, /І8/, /І9/ слідує

$$r_1 = \max\{\|x^* - x^{(1)}\|, \|x^* - \bar{x}^{(1)}\|, \|A^* - A_1\|\} \leqslant \max\{(K_0 r_0)^t r_0, (M_0 r_0)^t r_0,$$

$$(D_0 r_0)^{t_0} r_0\} \leqslant (h_0 r_0)^{t_0} r_0 ,$$

що підтверджує правильність оцінки /3/ при $n = 1$.

Враховуючи, що сам метод /2/ починає працювати з $x^{(1)}$, перевіримо виконання умов для точки $^{(2)}$.

Аналогічно до формул /І7/, /І8/, /І9/ одержимо

$$\|x^* - x^{(2)}\| \leqslant (K_0 r_1)^t r_1 ,$$

$$\|x^* - \bar{x}^{(2)}\| \leqslant (M_0 r_1)^t r_1 ,$$

$$\|A^* - A_2\| \leqslant (D_0 r_1)^{t_0} r_1 .$$

Отже

$$r_2 \leqslant \max\{(K_0 r_1)^t r_1, (M_0 r_1)^t r_1, (D_0 r_1)^{t_0} r_1\} \leqslant (h_0 r_1)^{t_0} r_1 \leqslant$$

$$\leqslant (h_0 r_0)^{t_0^2 + 2t_0} r_0 = (h_0 r_0)^{(t_0+1)^2 - 1} r_0 ,$$

що підтверджує правильність оцінки /3/ при $n = 2$.

За методом індукції тепер легко одержати оцінку для довільного $n > 2$. Теорема доведена.

З а у в а ж е н н я І. Виберемо $A_0 = [P'(x^{(0)})]^{-1}$, причому $\|A_0\| \leqslant B_0$, тоді

$$\|A^* - A_0\| = \|[P'(x^*)]^{-1} - [P'(\bar{x}_0)]^{-1}\| \leqslant B L B_0 \|x^* - \bar{x}^{(0)}\|,$$

і в теоремі можна взяти

$$r_0 = \max\{\|x^* - x^{(0)}\|, \ell \|x^* - x^{(0)}\|\},$$

$$\ell = \max\{1, BLB_0\}.$$

З а у в а ж е н н я 2. Для розв"язку рівняння /І/ на паралельних процесорах можна побудувати модифікацію методу [І] з паралельною апроксимацією оберненого оператора

$$A_{n+1}^{(0)} = A_n ,$$

$$A_{n+1}^{(s+1)} = A_{n+1}^{(s)} \left(2E - P'(\bar{x}^{(n)}) A_{n+1}^{(s)}\right), \qquad s = 0, 1, \cdots, \kappa - 1$$

$$A_{n+1} = A_{n+1}^{(\kappa)} , \qquad n = 0, 1, \cdots .$$

1. Б а р т і ш М.Я., Р о м а н Л.Л. Про один рекурсивний метод розв"язування нелінійних функціональних рівнянь //Вісн. Львів. ун-ту. Сер.мех.-мат. 1986. Вип. 26. С.3-7. 2. У л ь м С... Об итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратного оператора //Изв. АН УССР. Физика, математика. 1967. Т.16. №4. С.403-411.

Стаття надійшла до редколегії 30.09.90

УДК 539.3:519.6

Я.Г.Савула, І.М.Сипа, І.В.Струтинський

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ТОНКИМИ ПОКРИТТЯМИ І ВКЛЮЧЕННЯМИ

Проблеми математичного моделювання процесу розподілу температури в тілах з тонкими теплопровідними включеннями або покриттями розглядались багатьма дослідниками [1]. В більшості досліджень тонкий теплопровідний шар, яким є покриття, чи включення, моделюється спеціальними граничними умовами, на поверхні контакту з тілом. У нашій праці для цього використовується комбінована математична модель, яка описується зв"язаною системою диференціальних рівнянь різної вимірності. Моделі такого типу [5,6] зручні для застосування чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів.

1. Математична модель теплопровідності тонкого шару.

Розглянемо тонкий шар Ω, що описується криволінійною системою координат α_1, α_2

$$\Omega = \left\{ \alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^c \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_1^e - h \leqslant \alpha_2 \leqslant h \right\}.$$

Нехай $A = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}$, $K = (x_2'' x_1' - x_2' x_1'')/A^3$ – коефіцієнт Ляме та кривизна серединної кривої $\alpha_2 = 0$, яка задається параметричними рівняннями $x_1 = x_1(\alpha_1)$, $x_2 = x_2(\alpha_1)$. Тоді компоненти g_{ij} метричного тензора ортогональної системи координат α_1, α_2 матимуть вигляд $g_{11} = A^2(1 + \alpha_2 K)$, $g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{22} = 0$.

Вважатимемо, що товщина $2h$ шару і кривизна K є настільки малими, що у формулі для g_{11} можна знехтувати величиною $\alpha_2 K$