1. Б а р т і ш М.Я., Р о м а н Л.Л. Про один рекурсивний метод розв"язування нелінійних функціональних рівнянь //Вісн. Львів. ун-ту. Сер.мех.-мат. 1986. Вип. 26. С.3-7. 2. У л ь м С... Об итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратного оператора //Изв. АН УССР. Физика, математика. 1967. Т.16. №4. С.403-411.

Стаття надійшла до редколегії 30.09.90

УДК 539.3:519.6

Я.Г.Савула, І.М.Сипа, І.В.Струтинський

# МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ТОНКИМИ ПОКРИТТЯМИ І ВКЛЮЧЕННЯМИ

Проблеми математичного моделювання процесу розподілу температури в тілах з тонкими теплопровідними включеннями або покриттями розглядались багатьма дослідниками [1]. В більшості досліджень тонкий теплопровідний шар, яким є покриття, чи включення, моделюється спеціальними граничними умовами, на поверхні контакту з тілом. У нашій праці для цього використовується комбінована математична модель, яка описується зв"язаною системою диференціальних рівнянь різної вимірності. Моделі такого типу [5,6] зручні для застосування чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів.

## 1. Математична модель теплопровідності тонкого шару.

Розглянемо тонкий шар $\Omega$, що описується криволінійною системою координат $\alpha_1, \alpha_2$

$$\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^c \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^e, -h \leq \alpha_2 \leq h\}.$$

Нехай $A = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}$, $K = (x_2'' x_1' - x_2' x_1'')/A^3$ – коефіцієнт Ляме та кривизна серединної кривої $\alpha_2 = 0$, яка задається параметричними рівняннями $x_1 = x_1(\alpha_1)$, $x_2 = x_2(\alpha_1)$. Тоді компоненти $g_{ij}$ метричного тензора ортогональної системи координат $\alpha_1, \alpha_2$ матимуть вигляд $g_{11} = A^2(1 + \alpha_2 K)$, $g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$.

Вважатимемо, що товщина $2h$ шару і кривизна $K$ є настільки малими, що у формулі для $g_{11}$ можна знехтувати величиною $\alpha_2 K$

порівняно з одиницею, та коефіцієнт теплопровідності шару не залежить від змінної $\alpha_2$ .

Враховуючи це, запишемо рівняння теплопровідності [I] тонкого шару у вигляді

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\lambda}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha_1}\right)+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial\alpha_2^2}+q. \qquad /I/$$

Тут $c$ – питома теплоємність, $\rho$ – густина, $\tau$ – параметр часу, $q$ – густина теплового потоку внутрішніх джерел тепла.

Зауважимо, що в деяких працях, зокрема у монографії [3], у рівнянні вигляду /I/ утримується ще й доданок $K\lambda\frac{\partial T}{\partial\alpha_2}$ , який одразу призводить до втрати важливої з точки зору ефективності застосовуваних чисельних методів властивості симетрії операторів. Тут вважається, що $K$ настільки мале, що цим доданком можна знехтувати.

Допустимо, що на гранях $\alpha_2=\pm h$ виконуються умови теплообміну.

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial\alpha_2}=-q_n^+,\ \alpha_2=h;\ \lambda\frac{\partial T}{\partial\alpha_2}=q_n^-,\quad \alpha_2=-h. \qquad /2/$$

Зважаючи на малість товщини шару, задамо розподіл температури за змінною $\alpha_2$ у вигляді лінійного закону

$$T=t_1(\alpha_1,\tau)+\frac{\alpha_2}{h}t_2(\alpha_1,\tau), \qquad /3/$$

де $t_1(\alpha_2,\tau), t_2(\alpha_2,\tau)$ – шукані функції.

Підставляючи /3/ у рівняння /I/, та ортогоналізуючи нев"язку до I і $\alpha_2$ в сенсі інтеграла за змінною $\alpha_2$ в межах від $-h$ до $h$ , а також враховуючи умови /I.2/, отримаємо систему диференціальних рівнянь для визначення функцій $t_1$ , $t_2$

$$-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1}+c_0\rho\frac{\partial t_1}{\partial\tau}=-(q_n^+ + q_n^-)+q^0$$

$$-\frac{1}{3A}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{h^2}\lambda_0 t_2+\frac{c_0\rho}{3}\frac{\partial t_2}{\partial\tau}=-(q_n^+ - q_n^-)+\frac{1}{h}q^1. \qquad /4/$$

Тут $c_0=2hc$, $\lambda_0=2h\lambda$, $q^0=\int_{-h}^{h}q\,d\alpha_2$,

$q^1=\int_{-h}^{h}q\alpha_2\,d\alpha_2$, $\alpha_1,\alpha_2\in\Omega$, $0<\tau<\infty$.

До цих рівнянь додамо граничні та початкові умови, які отримуються таким же способом, як і рівняння /4/

$$\lambda_0\frac{\partial t_j}{\partial\alpha_1}=\alpha_0\left(t_j-T_0^{j-1}\right)$$

$$j=1,2.$$

$$-\lambda_0\frac{\partial t_j}{\partial\alpha_1}=\alpha_e\left(t_j-T_e^{j-1}\right) \qquad /5/$$

$$t_1(\alpha_1, 0) = t_1^0 \quad , \quad t_2(\alpha_1, 0) = t_2^0 . \qquad /6/$$

Тут

$$\alpha_e = 2h\alpha \Big|_{\alpha_1 = \alpha_1^i} ; \qquad T_e^0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} T_c \Big|_{\alpha_1 = \alpha_1^i} d\alpha_2 ;$$

$$T_i^1 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^{h} T_c \Big|_{\alpha_1 = \alpha_1^i} \alpha_2 \, d\alpha_2 ;$$

$T_c$ – температура зовнішнього середовища; $t_1^0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} T_0 \, d\alpha_2$

$t_2^0 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^{h} T_0 \, \alpha_2 \, d\alpha_2$ ; $T_0$ – розподіл температури в шарі при $\tau = 0$.

## 2. Тіло з тонким покриттям

Розглянемо задачу теплопровідності для тіла з тонким покриттям /рис. I/.

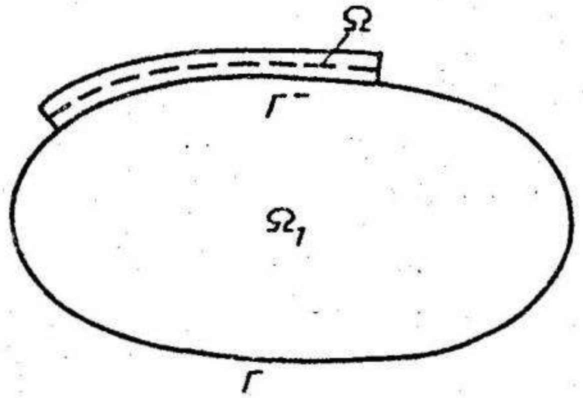


Рис. I

Розподіл температури в області $\Omega_1 \cup \Omega$ опишемо системою диференціальних рівнянь

$$-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} + \alpha^+ t_2 + \alpha^+ t_1 = -q_n^- + q^0 , \qquad /7/$$

$$-\frac{1}{3A}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_2}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{1}{h^2}\lambda_0 + \alpha^+\right) t_2 + \alpha^+ t_1 = q_n^- + \frac{1}{h} q^1 ;$$

$$\alpha_1 \times \tau \in ]\alpha_1^0, \alpha_1^0[ \times ]0, +\infty[$$

6–3036

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x_2}+c_1\rho\frac{\partial T_1}{\partial \tau}=q_1, \qquad /8/$$

$$x_1, x_2 \times \tau \in \Omega_1 \times ]0, +\infty[.$$

Зауважимо, що система рівнянь /7/ отримується в /4/ шляхом підстановки

$$q_n^+ = \alpha^+ (t_1 + t_2 - T_c^+),$$

де $\alpha^+$ - коефіцієнт теплообміну на ділянці границі $\Gamma^+ = \{\alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_1^e, \alpha_2 = h\}$, $T_c^+$ - температура зовнішнього середовища на цій же ділянці.

Система зв"язаних диференціальних рівнянь /7/, /8/, яка складається з рівнянь різної вимірності, повинна бути розв"язана при наступних початкових та граничних умовах:

$$t_1(\alpha_1, 0) = t_1^0,\ t_2(\alpha_2, 0) = t_2^0,\ T_1(x_1, x_2, 0) = T_1^0, \quad \tau = 0;$$

умови /5/ та $-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial h} = \alpha_1 (T_1 - T_c), \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1,$

$h$ - зовнішня нормаль до границі $\Gamma_1$.

На ділянці границі $\Gamma^-$ необхідно задати умови спряження

$$T_1 = t_1 - t_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial h^-} = q_n^- \qquad \text{на } \Gamma^-,$$

$h^-$ - зовнішня нормаль до границі $\Gamma^-$.

## 3. Тіло з тонким включенням

Подамо основні співвідношення для задачі теплопровідності в області $\Omega_1 \cup \Omega \cup \Omega_2$, яка зображена на рис. 2.

Розподіл температури описується такими диференціальними рівняннями:

рівняння /4/ та

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\lambda_2\frac{\partial T_1}{\partial x_2}+c_1\rho_1\frac{\partial T_1}{\partial \tau}=q_1 \qquad /9/$$

$$x_1, x_2 \times \tau \in \Omega_1 \times ]0, +\infty[;$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x_2}+c_2\rho_2\frac{\partial T_2}{\partial \tau}=q_2, \qquad /10/$$

$$x_1, x_2 \times \tau \in \Omega_2 \times ]0, +\infty[.$$

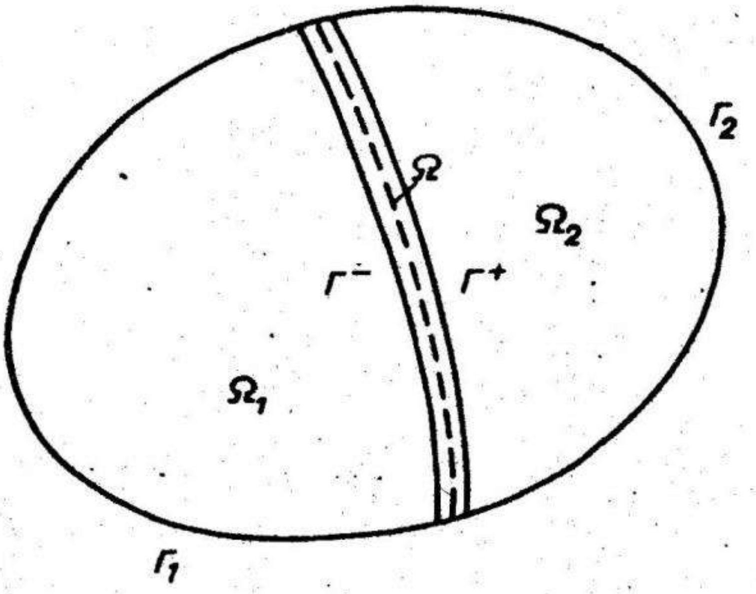


Рис. 2

Система зв"язаних диференціальних рівнянь /4/, /9/, /10/ різної вимірності повинна бути розв"язана при наступних початкових та граничних умовах:

умови /6/ та $T_1(x_1, x_2, 0) = T_1^0, T_2(x_1, x_2, 0) = T_2^0;$ /11/

умови /5/ та $\tau = 0$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial h} = \alpha_1 (T_1 - T_c), \; x_1, x_2 \in \Gamma_1, \; -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial h} = \alpha_2 (T_2 - T_c), \quad x_1, x_2 \in \Gamma_2. \qquad /12/$$

В області границі $\Gamma^+$, $\Gamma^-$ повинні бути задані умови спряження

$$T_1 = t_1 - t_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial h^-} = q_n^- \quad \text{на} \quad \Gamma^-; \qquad /13/$$

$$T_2 = t_1 + t_2, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial h^+} = q_n^+ \quad \text{на} \quad \Gamma^+, \qquad /14/$$

де $h^-$, $h^+$ зовнішні нормалі до границь $\Gamma^-$, $\Gamma^+$.

## 4. Деякі властивості диференціальних операторів

Побудовані математичні моделі містять нові диференціальні оператори по просторових змінних, відмінні від операторів, що містяться в класичній моделі теплопровідності, наприклад, рівняння /8/. Їх властивості розкриваються наступними лемою та теоремою. Розглянемо випадок однорідних граничних умов на температуру.

Л е м а. Диференціальні оператори за просторовими змінними задач /4/, /7/, /8/; /4/, /9/, /10/ з однорідними граничними умовами на температуру є симетричними.

Д о в е д е н н я. Випливає з наступного виду скалярних добутків, що відповідають трьом названим задачам:

$$(A_1(t_1,t_2),\tilde t_1,\tilde t_2)=\int_{\alpha_1^\circ}^{\alpha_1^e}\Big(\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde t_1}{\partial\alpha_1}+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde t_2}{\partial\alpha_1}+\frac{A}{h^2}\lambda_0 t_2\tilde t_2\Big)d\alpha_1; \qquad /15/$$

$$(A_2(t_1,t_2,T_1),\tilde t_1,\tilde t_2,\tilde T_1)=\int_{\alpha_1^\circ}^{\alpha_1^e}\Big\{\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde t_1}{\partial\alpha_1}+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde t_2}{\partial\alpha_1}+\alpha^+At_1\tilde t_1+\alpha^+A(t_1t_2+\tilde t_1t_2)\Big\}d\alpha_1+$$

$$+\int_{\Omega_1}\lambda_1\,\mathrm{grad}\,T_1\,\mathrm{grad}\,\tilde T_1\,d\Omega; \qquad /16/$$

$$(A_3(t_1,t_2,T_1,T_2),\tilde t_1,\tilde t_2,\tilde T_1,\tilde T_2)=$$

$$=\int_{\alpha_1^\circ}^{\alpha_1^e}\Big\{\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde t_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{3}\frac{\lambda_0}{A}\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde t_2}{\partial\alpha_1}+\frac{A}{h^2}\lambda_0t_2\tilde t_2\Big\}d\alpha_2+$$

$$+\int_{\Omega_1}\lambda_1\,\mathrm{grad}\,T_1\,\mathrm{grad}\,\tilde T_1\,d\Omega+\int_{\Omega_2}\lambda_2\,\mathrm{grad}\,T_2\,\mathrm{grad}\,\tilde T_2\,d\Omega. \qquad /17/$$

Т е о р е м а. Якщо серединна крива шару є гладкою кривою без особливих точок $A>0$, а області $\Omega_1,\Omega_2$ є однозв"язними областями з ліпшицевими границями, то оператори $A_i$, $i$ = 1,2,3 розглянутих задач /випадок однорідних граничних умов на температуру/ є додатно визначеними.

Д о в е д е н н я. Випливає із співвідношень /15/-/17/ шляхом застосування нерівностей Фрідріхса [4].

Отже, оператори побудованих математичних моделей мають такі ж властивості, як і оператор класичної задачі теплопровідності.

1. Б е л я е в Н.М., Р я д н о А.А. Методы теории теплопроводности. В 2-х ч. Ч.1. М., 1982. 2. К и т Г.С., К р и в ц у н М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. К., 1983. 3. М о т о в и л о в е ц И.А. Теплопроводность пластин и тел вращения. К., 1969. 4. Р е к т о р и с К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985. 5. С а в у л а Я.Г., Д ы я к И.И., Д у б о в и к А.В. Применение комбинированной модели

для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций //Прикл. механика. 1989. Т.25. №9. 5. Ciarlet P.G. Plates and Functions in Elastic Multi-Structures. Paris, 1990.

Стаття надійшла до редколегії 19.12.91

УДК 539.3

Н.П.Флейшман, О.Б.Олексів

# ДИНАМІЧНІ УМОВИ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН З ВИДАВКАМИ

З метою збільшення жорсткості тонких оболонок їх часто рельєфно видавлюють. Вплив видавок на жорсткість, міцність, стійкість і коливання оболонок вивчено поки-що недостатньо. У зв"язку з цим подаємо умови спряження для оболонки з видавкою.

Видавка постійної висоти $2\delta$, яка з"єднує дві частини /першу та другу/ оболонкової конструкції, розглядається як елемент оболонки, деформація якої моделюється рівняннями теорії Кірхгофа-Лява або типу Тимошенка. Її серединна поверхня віднесена до системи ортогональних криволінійних координат $(\alpha_1, \alpha_2)$ за які прийняті лінії кривизни. За основні невідомі приймаються статичні й динамічні фактори, які дають змогу формулювати в алгебраїчному вигляді граничні умови на краях видавки $\alpha_1 = \pm\delta$ [1,2]. Іншими словами, компонентами шуканої вектор-функції у випадку класичної теорії Кірхгофа-Лява є зусилля $(N_1, S_1^*, Q_1^*)$ згинні моменти $M_1$, переміщення $(u, v, w)$ точок серединної поверхні та кути повороту $\theta$, тобто

$$\bar{N} = \bar{K} = \{\bar{K}_n(s, \alpha_2, t)\} = \{N_1, S_1^*, Q_1^*, M_1, u, v, w, \theta\}_{(n=\overline{1,8})}. \qquad /1/$$

Тут $t$ – час, $s \equiv \alpha_1$ – дуга на $\alpha_1$ – лінії, причому $|s| \leq 2\delta$

У випадку уточненої теорії типу Тимошенка за основні невідомі прийнято вектор

$$\bar{N} = \bar{T} = \{T_n(s, \alpha_2, t)\} = \{N_1, N_{12}, Q_1, M_1, H, u, v, w, \psi_1, \psi_2\} \qquad /2/$$
$$(n = \overline{1,10}).$$

Тут використані ті ж позначення, що й у [2].

Вектор $\bar{N}$ /1/ чи /2/ повинен задовольняти уніфіковані векторно-матричні рівняння руху оболонки