для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций //Прикл. механика. 1989. Т.25. №9. 5. Ciarlet P.G. Plates and Functions in Elastic Multi-Structures. Paris, 1990.

Стаття надійшла до редколегії 19.12.91

УДК 539.3

Н.П.Флейшман, О.Б.Олексів

ДИНАМІЧНІ УМОВИ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН З ВИДАВКАМИ

З метою збільшення жорсткості тонких оболонок їх часто рельєфно видавлюють. Вплив видавок на жорсткість, міцність, стійкість і коливання оболонок вивчено поки-що недостатньо. У зв"язку з цим подаємо умови спряження для оболонки з видавкою.

Видавка постійної висоти 2δ, яка з"єднує дві частини /першу та другу/ оболонкової конструкції, розглядається як елемент оболонки, деформація якої моделюється рівняннями теорії Кірхгофа-Лява або типу Тимошенка. Її серединна поверхня віднесена до системи ортогональних криволінійних координат (α_1, α_2) за які прийняті лінії кривизни. За основні невідомі приймаються статичні й динамічні фактори, які дають змогу формулювати в алгебраїчному вигляді граничні умови на краях видавки $\alpha_1 = \pm\delta$ [1,2]. Іншими словами, компонентами шуканої вектор-функції у випадку класичної теорії Кірхгофа-Лява є зусилля (N_1, S_1^*, Q_1^*) згинні моменти M_1, переміщення (u, v, w) точок серединної поверхні та кути повороту θ, тобто

$$\bar{N} = \bar{K} = \{\bar{K}_n(s, \alpha_2, t)\} = \{N_1, S_1^*, Q_1^*, M_1, u, v, w, \theta\}_{(n=\overline{1,8})}. \qquad /1/$$

Тут t – час, $s = \alpha_1$ – дуга на α_1 – лінії, причому $|s| \leqslant 2\delta$.

У випадку уточненої теорії типу Тимошенка за основні невідомі прийнято вектор

$$\bar{N} = \bar{T} = \{T_n(s, \alpha_2, t)\} = \{N_1, N_{12}, Q_1, M_1, H, u, v, w, \psi_1, \psi_2\} \qquad /2/$$
$$(n = \overline{1,10}).$$

Тут використані ті ж позначення, що й у [2].

Вектор $\bar{N}$ /1/ чи /2/ повинен задовольняти уніфіковані векторно-матричні рівняння руху оболонки

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \tau} = L\bar{N} - G\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + f(s,\alpha_2,t), \qquad /3/$$

де $f(s,\alpha_2,t) = \{f_n\}$ – вектор заданого зовнішнього розподіленого навантаження. Для обох теорій оболонок елементи вектора f та квадратних матриць L_K, G_K і L_T, G_T відповідно подані у монографіях [1,2].

Для виведення умов спряження область серединної поверхні видавки дискретизується лише в напрямку α_1 -лінії, на якій, в міру малості висоти видавки 2δ, беруться лише три точки $s = 0$, $s = \pm\delta$. Рівняння /3/ записується тільки для точок осі видавки $s = 0$, а умови її спаю із сусідніми оболонками задовольняються на лініях $s = \pm\delta$. Замінюючи першу похідну в точках $s = 0$ її скінченнорізницевим аналогом із точністю до $O(\delta^2)$, переписуємо рівняння /3/ у вигляді

$$\frac{1}{2\delta}(\bar{N}^+ - \bar{N}^-) = \left(L\bar{N} - G\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial t^2} + \bar{f}\right)_{s=0}, \qquad /4/$$

де $\bar{N}^\pm = \bar{N}(\pm\delta, \alpha_2, t)$.

Апроксимуючи лінійними функціями розподіл компонент вектора $\bar{N}$ по висоті видавки ($|s| \leq 2\delta$), маємо

$$(\bar{N})_{s=0} = \frac{1}{2}(\bar{N}^+ + \bar{N}^-). \qquad /5/$$

Підставляючи, нарешті, /5/ в /4/, одержуємо

$$(\bar{N}^+ - \bar{N}^-) = \delta\left(L_0 - G_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\bar{N}^+ + \bar{N}^-) + 2\delta\bar{f}_0. \qquad /6/$$

Тут $L_0 = (L)_{s=0}$, $G_0 = (G)_{s=0}$, $f_0 = \bar{f}(0,\alpha_2,t)$.

У кожній конкретній задачі вектори $\bar{N}^+$ і $\bar{N}^-$ виражаються через контактні статичні та кінематичні фактори з"єднуваних оболонок I, 2 з їх умов спаю із видавкою вздовж ліній $s = \pm\delta$. Отже, співвідношення /6/ і є умовами спряження оболонок I, 2 з малою видавкою, які дають змогу при розрахунку конструкції не розглядати видавки і лише побічно врахувати її механічні й геометричні параметри.

У загальному випадку умови спаю видавки зі сусідніми оболонками можна записати у вигляді

$$\bar{N}^- = C\bar{N}_1, \qquad \bar{N}^+ = C\bar{N}_2, \qquad /7/$$

де, аналогічно /1/ чи /2/, через $\bar{N}_1$ і $\bar{N}_2$ позначено відповідно вектор $\bar{N}$ для першої та другої оболонок, спаяних із видавкою, на лініях $s = \pm\delta$; C – відома квадратна матриця, що залежить від геометрії конструкції.

Так, наприклад, для циліндричної оболонки з внутрішньою конічною видавкою в осесиметричному випадку /за класичною теорією/ маємо

$$\bar{N}_j = \{\bar{N}_1, Q_1, M_1, u, w, \theta\}, \ (j = 1, 2),$$
$$C = \{c_{kl}\}, \quad (k, l = \overline{1,6}),$$
$$C_{11} = C_{22} = C_{44} = C_{55} = \sin\beta,$$
$$C_{21} = -C_{12} = C_{54} = -C_{45} = \cos\beta, \qquad /8/$$
$$C_{33} = C_{66} = 1.$$

Решта елементів матриці C дорівнюють нулю, через β позначено кут між зовнішньою нормаллю конічної видавки і віссю циліндрів.

Підставляючи /7/ в /6/, одержуємо інший вигляд умов спряження оболонок з малою внутрішньою видавкою:

$$\left[E + \delta\left(L_0 - G_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right] C\bar{N}_1 -$$
$$-\left[E - \delta\left(L_0 - G_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right] C\bar{N}_2 + 2\delta\bar{f}_0 = 0, \qquad /9/$$

де E - одинична матриця; матриці L_0 і G_0 приведено в [1,2].

Позначимо через φ_T кут між зовнішньою нормаллю довільної осесиметричної конструкції та віссю обертання, а через φ_B - кут між зовнішньою нор лю видавки та віссю обертання. Тоді одержимо загальний вигляд матриці C, а значить і умов спряження /9/:

$$C_{11} = C_{22} = C_{44} = C_{55} = \cos(\varphi_B - \varphi_T),$$
$$C_{12} = -C_{21} = C_{45} = -C_{54} = \sin(\varphi_B - \varphi_T),$$
$$C_{33} = C_{66} = 1, \qquad /10/$$

решта елементів матриці C дорівнюють нулю.

З /9/ і /10/ можна легко одержати умови спряження для циліндричної, конічної, сферичної оболонок із внутрішніми видавками. При цьому потрібно задати лише певні кути φ_T і φ_B. Частковим випадком є також кільцева пластинка з внутрішньою циліндричною видавкою для якої

$$C_{21} = -C_{12} = C_{33} = C_{54} = -C_{45} = C_{66} = 1, \qquad /11/$$

решта $C_{ij} = 0$.

З /6/ можна легко вивести узагальнені граничні умови для обо н ки з малою крайовою видавкою. Для цього достатньо виключити і /6/

ті силові чи кінематичні фактори, які не задані на зовнішньому краї видавки. . кінцевому результаті маємо такі умови

$$BC\bar{N} = 0, \qquad /12/$$

де $\bar{N}$ - вектор /8/, C - відповідна квадратна матриця /10/. Зокрема, у випадку шарнірно закріпленого краю видавки елементи матриці B розміру 3x6 мають вигляд:

$$B_{13} = -\delta \ell_{63}, \quad B_{15} = -\frac{(1+\delta \ell_{66})(1-\delta \ell_{55})}{\delta \ell_{56}},$$

$$B_{23} = -\frac{\ell_{12}}{\ell_{32}}(1-\delta \ell_{33}), \quad B_{24} = -\delta \ell_{14} - \frac{(1+\delta \ell_{11})(1-\delta \ell_{44})}{\delta \ell_{41}},$$

$$B_{25} = -\delta \ell_{15} + \frac{\ell_{45}}{\ell_{41}}(1+\delta \ell_{11}) + \frac{\ell_{12}\ell_{36}}{\ell_{32}\ell_{56}}(1-\delta \ell_{55}),$$

$$B_{33} = -\frac{(1+\delta \ell_{22})(1-\delta \ell_{33})}{\delta \ell_{32}}, \quad B_{34} = -\delta \ell_{24} - \frac{\ell_{21}}{\ell_{41}}(1-\delta \ell_{44}), \qquad /13/$$

$$B_{35} = -\delta \ell_{25} + \frac{\delta \ell_{21}\ell_{45}}{\ell_{41}} + \frac{\ell_{36}(1+\delta \ell_{22})(1+\delta \ell_{55})}{\delta \ell_{32}\ell_{56}},$$

$$B_{16} = B_{21} = B_{32} = 2,$$

решта $B_{ij} = 0$, а ℓ_{ij} - елементи відповідної матриці L_0.

Розглянемо ще неосесиметричну задачу для оболонки обертання з крайовою видавкою, край $s=-\delta$ якої вільний. За основні невідомі приймемо вектор

$$\bar{N} = \{N_x, N_z, S^*, M_s, u_x, u_z, v, \theta_s\}. \qquad /14/$$

При такому виборі невідомої вектор-функції маємо $C=E$.

Граничні умови одержуються зі співвідношення /6/. Виключивши із /6/ не задані на краю видавки $s=-\delta$ переміщення u_x^-, u_z^-, v^- і кут повороту θ_s^-, маємо

$$(P - DZ^{-1}R)\bar{N} = 2\delta \bar{F}_1 - 2\delta D \bar{F}_2, \qquad /15/$$

де $\bar{F}_1 = (f_1, \dots, f_4)^T$, а $\bar{F}_2 = (f_5, \dots, f_8)^T$.
Через матриці P і R розміру 4x8 позначено верхню і нижню половини матриці $[E - \delta(L_0 - G_0\, \partial^2/\partial t^2)]$, а через матриці D і Z розміру 4x4 - відповідно верхню і нижню половини матриці

$[E+\delta(L_0-G_0\ \partial^2/\partial t^2)]$. Співвідношення /І5/ і є записом граничних умов для неосесиметричної задачі відносно оболонки обертання з видавкою, край $s=-\delta$ якої вільний.

І. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь Я.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. К., 1986. 2. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.90

УДК 539.3:517.977

І.І.Дияк, Б.Я.Шарманський, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМ НАГРІВОМ

І. Нехай осесиметричне тіло належить до циліндричної системи координат (r,ϑ,z) таким чином, що його меридіанний перетин займає обмежену область Ω точок $x=(r,z)$ площини rOz. Будемо вважати, що межа області неперервна за Ліпшіцем, так що $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$. Допустимо, що теплофізичні властивості тіла описуються коефіцієнтами теплопровідності $\lambda=\lambda(x)>0$ і теплоємності $c_v=c_v(x)>0$ відповідно та температура $u(x,t)$ тіла визначається із початково-крайової задачі:

$$c_v\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad \text{в } \Omega\times(0,T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0, \quad \text{на } \Gamma_1\times(0,T],$$

$$-\lambda\frac{\partial u}{\partial n}=\alpha(u-\tau) \quad \text{на } \Gamma_2\times(0,T],$$

$$u\Big|_{t=0}=u_0 \quad \text{в } \Omega$$

де $u_0=u_0(x)$ заданий початковий розподіл температури в тілі, $\alpha=const>0$ коефіцієнт теплообміну зі зовнішнім середовищем,

7-3036