

$[E + \delta(L_0 - G_0 \partial^2/\partial t^2)]$. Співвідношення /15/ і є записом граничних умов для неосесиметричної задачі відносно оболонки обертання з видавкою, край $S = -\delta$ якої вільний.

І. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородський А.Б., Шинкарь Я.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. К., 1986. 2. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.90

УДК 539.3:517.977

І.І.Дияк, Б.Я.Шарманський, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕГУЛІРІЗОВАНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМ НАГРІВОМ

І. Нехай осесиметричне тіло належить до циліндричної системи координат (r, ϑ, z) таким чином, що його меридіанний перетин займає обмежену область Ω точок $x = (r, z)$ площини rOz . Будемо вважати, що межа області неперервна за Лібніцем, так що $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Допустимо, що теплофізичні властивості тіла описуються коефіцієнтами теплопровідності $\lambda = \lambda(x) > 0$ і теплоємності $c_v = c_v(x) > 0$ відповідно та температура $u(x, t)$ тіла визначається із початково-крайової задачі:

$$c_v \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{в } \Omega \times (0, T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

$$\text{на } \Gamma_1 \times (0, T],$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - \tau)$$

$$\text{на } \Gamma_2 \times (0, T],$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

$$\text{в } \Omega$$

де $u_0 = u_0(x)$ заданий початковий розподіл температури в тілі,
 $\alpha = \text{const} > 0$ коефіцієнт теплообміну зі зовнішнім середовищем.

© Дияк І.І., Шарманський Б.Я., Шинкаренко Г.А., 1992

температура $\tau = \tau(t)$ якого може вибиратись з множини:

$$U = \{ \tau \in L^2(0, T) : \theta_{\min} \leq \tau(t) \leq \theta_{\max} \}. \quad /2/$$

$\theta_{\min}, \theta_{\max}$ задані обмеження, $\theta_{\min} \leq \theta_{\max}$.

Розглянемо задачу оптимального керування [1]:
задано $p \in L^2(\Omega)$;

знайти функцію $\theta \in U$ таку, що мінімізує функціонал

$$J(\theta) = \int_{\Omega} |u(x, T, \tau) - p(x)|^2 dx, \quad /3/$$

на множині U при умові, що $u(x, t, \tau)$ є розв'язком початково-крайової задачі /1/.

Слідуючи [1, 5], неважко показати, що функціонал /3/ диференційований на просторі $H \in L^2(0, T)$ і його градієнт можна представити у вигляді

$$J'(\theta) = \int_{\Gamma_2} \frac{\alpha}{c_v} w(x, t, \theta) r d\gamma, \quad /4/$$

де w є розв'язком спряженої до /1/ задачі:

$$\begin{aligned} c_v \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, & \text{в } \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0, & \text{на } \Gamma_1 \times [0, T], \end{aligned} \quad /5/$$

$$-\lambda \frac{\partial w}{\partial n} = \alpha w, \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0, T],$$

$$w|_{t=T} = 2(u|_{t=T} - p), \quad \text{в } \Omega$$

2. Останній факт є основою для побудови такої процедури наближеного розв'язку задачі /3/.

Ввівши оператор проектування за правилом

$$\Pi \tau(t) = \begin{cases} \tau(t) & , \text{ якщо } \tau \in H, \\ \theta_{\min} & , \text{ якщо } \tau(t) < \theta_{\min}, \\ \theta_{\max} & , \text{ якщо } \tau(t) > \theta_{\max}, \end{cases} \quad \forall t \in [0, T], \quad /6/$$

скористаємось методом проекції градієнта [1, 2] для побудови наближених розв'язків θ_n задачі /3/. Вибравши $\theta_n(t)$ з рекурентних співвідношень, знаходимо

$$\theta_{n+1}(t) = \Pi[\theta_n(t) - \alpha_n J'(\theta_n)], \quad n = 0, 1, \dots, \quad /7/$$

де коефіцієнт спуску α_n визначається як розв'язок задачі мінімізації:

знайти $\alpha_n = \text{const} > 0$ таке, що

$$J(\Pi[\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)]) \leq J(\Pi[\theta_n - \beta J'(\theta_n)]), \quad \forall \beta \in R. \quad /8/$$

Остання задача розв'язується методом золотого поділу.

Найбільш трудомісткою частиною даного алгоритму є обчислення градієнта функціонала $J(\theta_n)$ за правилом /4/; для цього необхідно послідовно розв'язати дві початково-крайові задачі. На першому етапі розв'язується початково-крайова задача /1/ з $\tau = \theta_n$. Потім після підстановки одержаного розв'язку $u(x, t, \theta_n)$ в останнє з рівнянь /5/, визначається розв'язок $w(x, t, \theta_n)$ спряженої задачі.

Розв'язування задач /1/ і /5/ стають однотипними, якщо в /5/ зробити заміну $t' = T - t$. Використовується метод скінченних елементів у поєднанні зі схемою Кранка-Ніколсона [2,4].

3. Описаний алгоритм реалізований на Фортрані 77 у MS DOS. Для апробації методики розглянуто тестовий приклад про оптимальне керування від нагріву суцільного циліндра за рахунок зміни температури зовнішнього середовища. Безрозмірні параметри задачі вибирались такими:

$$R = H = 1, \quad c_v = \lambda = \alpha = 1, \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\theta_0 = 20, \quad p(x) = 30, \quad \theta_{\min} = 0, \quad \theta_{\max} = 60.$$

Результати розв'язування задачі подані на рис. 1-3. Початковий розподіл температури зовнішнього середовища за часом показаний кривою 4 на рис. 1, а розв'язок $\theta(t)$ одержаний за 8-ітерацій - кривою 1. На рис. 2 кривою 1 показано зміну величини критерію якості $J(\theta)$ на кожній ітерації, а розподіл температури по радіусу циліндра в кінцевий момент часу показаний кривою 1 на рис. 3. Очевидні значні труднощі практичної реалізації такого керування. Якщо межі $\theta_{\min}$, $\theta_{\max}$ зміни керування ширші, то розв'язок має ще більш нерегулярний характер.

4. Для "згладжування" оптимального керування пропонується використання методу регуляризації, тобто оптимальне керування сформу-

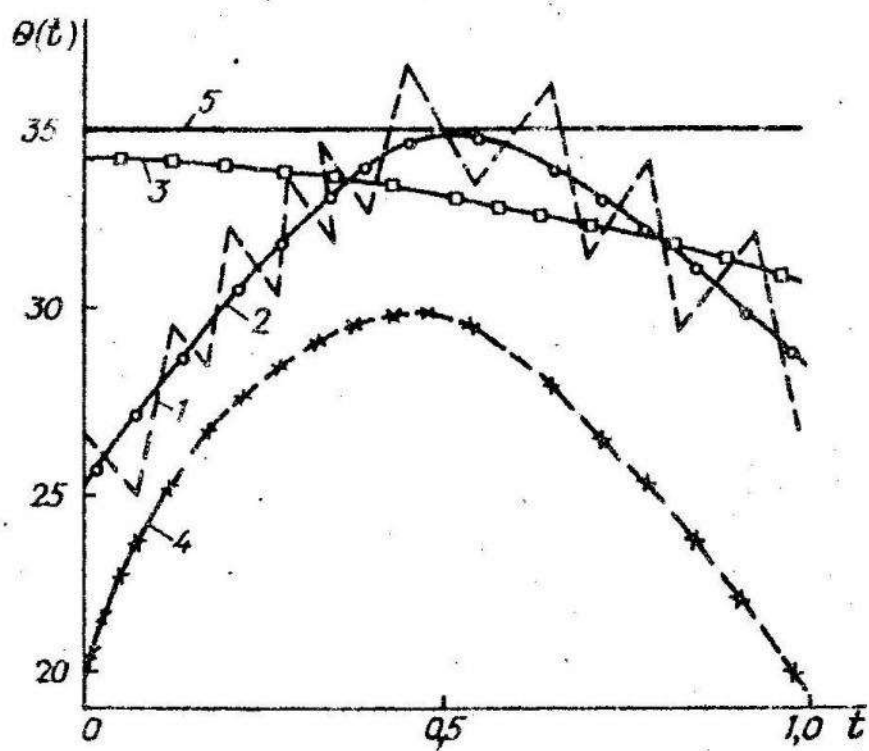


Рис. I

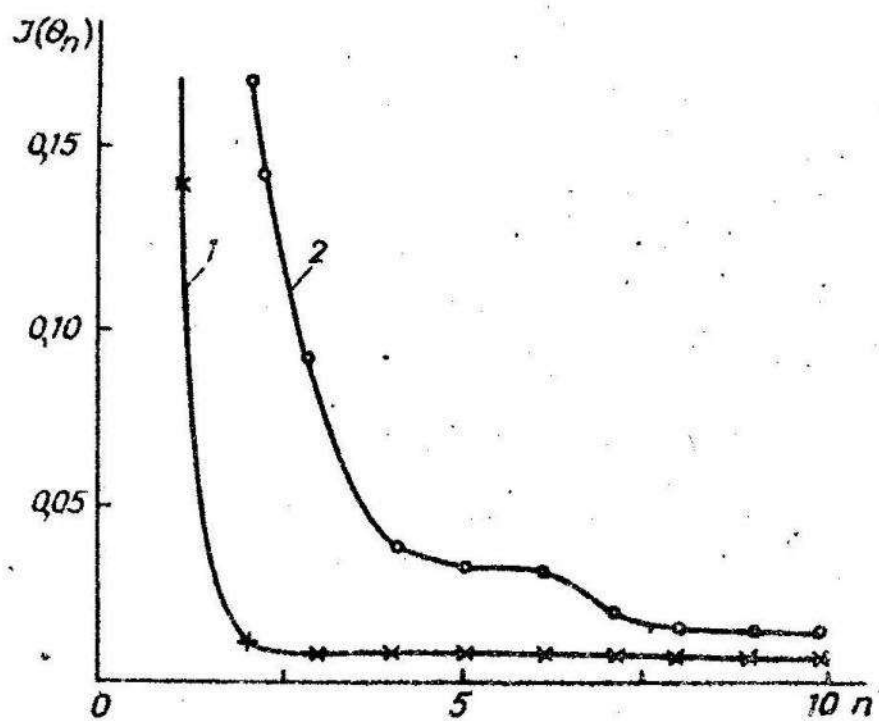


Рис. 2

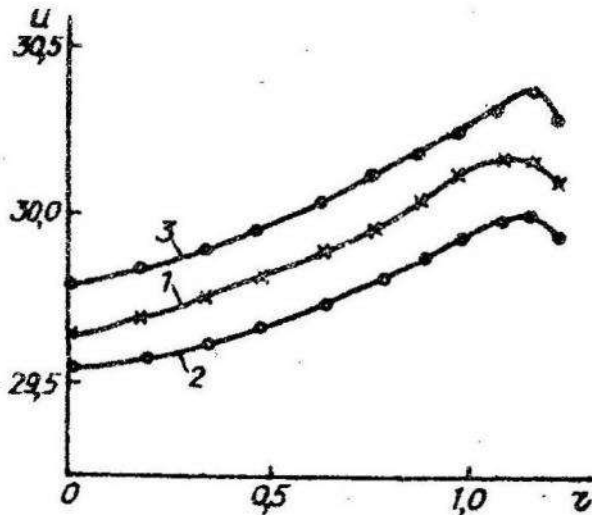


Рис. 3

льованної задачі шукати як розв'язок задачі мінімізації функції на-
ду вигляду

$$T(\tau) = Y(\tau) + \gamma F(\tau),$$

/9/

де $F(\tau)$ - стабілізуючий функціонал;

γ - ваговий коефіцієнт.

Для мінімізації функціоналу /9/ використаємо також вказаний
алгоритм. Якщо вибрати

$$F(\tau) = \int_0^T \tau^2(t) dt,$$

/10/

тоді можна показати, що градієнт функціоналу $F(\tau)$

$$F'(\tau) = 2 * \tau.$$

Але бажаних результатів при такому виборі стабілізатора не було
досягнуто.

До цих пір ми вимагали лише, щоб $\tau \in L^2(0, T)$. Прак-
тично ж набагато простіше реалізувати оптимальне керування з класу
 $C^k(0, T)$. Якщо припустити, що $\tau \in C^2(0, T)$, тоді можна вибрати
стабілізатором наступний функціонал:

$$G(\tau) = \int_0^T |\tau'(t)|^2 dt.$$

/11/

У цьому випадку можна показати, що на варіаціях $\delta\tau$ функції
 τ , для яких наявне співвідношення

$$\tau' \delta\tau \Big|_{t=0} = \tau' \delta\tau \Big|_{t=T} = 0,$$

/12/

градієнт функціоналу $G'(\tau)$ можна визначити за формулою:

$$\delta'(\tau) = -2 + \tau''(t).$$

/13/

Достатньою умовою для виконання /12/ буде:

$$\delta\tau \Big|_{t=0} = \delta\tau \Big|_{t=T} = 0.$$

Отже, для мінімізації функціоналу /9/ ми знову ж зможемо скористатись формулою /7/.

5. Результати розв'язання регуляризованої задачі зі стабілізатором вигляду /11/ приведені на рис. 1-3, кривими з індексом 2. На рис. 1 показано зміну керування в часі, на рис. 2 - зміну значення критерію оптимізації, на рис. 3 - розподіл температури по радіусу циліндра в кінцевий момент часу. На основі чисельного експерименту було виявлено, що оптимальним є значення вагового коефіцієнта

$$\gamma = 0,001.$$

При виборі початкового наближення у вигляді, зображеному кривою 5 /рис. 1/, керування одержане після восьми ітерацій, представлене кривою 3 на цьому ж рисунку. Слід відзначити якісну зміну оптимального керування при незмінній величині функціоналу /крива 3 на рис. 2/, що свідчить про багатоекстремальність задачі.

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981. 2. Дьяков И.И. Решение задач квазистатической термоупругости на основе применения высокоточных схем МКЭ: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984. 3. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов, 1981. 4. Тихонов А.И., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 5. Cavin R.R.III, Tandon S.C. Distributed Parameters System Optimum Control Design Via Finite Element Discretization //Automatica. 1977. V. 13. P. 611 - 614.

Стаття надійшла до редколегії 12.10.91