УДК 519.6

В.М.Зубов, Г.А.Шинкаренко

РОЗВ"ЯЗУВАНІСТЬ ТА АПРОКСИМАЦІЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСУ ТА ДИФУЗІЇ ДОМІШОК У НЕСТИСЛИВІЙ АТМОСФЕРІ

З позицій енергетичного підходу послідовно досліджуються питання коректності стаціонарної задачі про розповсюдження пасивних забруднюючих домішок у нестисливій атмосфері, побудови та збіжності відповідних апроксимацій Гальоркіна. Для типових просторів методу скінченних елементів отримані апріорні оцінки швидкості збіжності наближених розв"язків досліджуваних варіаційних задач.

1. Постановка крайової задачі

Розглянемо обмежену зв"язну область Ω точок $x=(x_1,\dots,x_n)$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем межею Γ та позначимо через $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ.

Нехай область Ω є частиною тонкого шару атмосфери, що знаходиться у безпосередньому контакті з поверхнею землі. В області Ω відомі вектор $u=(u_1(x),\dots,u_n(x))$ швидкості вітру та функція $f=f(x)$ інтенсивності джерел досліджуваних домішок. При цьому припускатимемо, що наявні включення

$$\begin{cases} u\in U=\{v=(v_1,\dots,v_n)\in H(div;\Omega)\,|\,div\, v=0 \text{ в } \Omega\} \\ f\in H=L^2(\Omega). \end{cases} \qquad /1/$$

Використані тут і далі функціональні простори ми запозичили у Дюво, Ліонса [2] та Сьярле [8].

З урахуванням допущень розподіл концентрації домішки, яку позначимо через $\psi=\psi(x)$, описується рівнянням

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\mu_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}-\psi u_i\right\}+\sigma\psi=f \quad \text{в } \Omega \qquad /2/$$

та крайовими умовами.

$$\psi=0 \text{ на } \Gamma_\psi,\ \Gamma_\psi=\{x\in\Gamma\,|\,u_i\nu_i<0\},\ mes(\Gamma_\psi)>0; \qquad /3/$$

$$-\mu_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\nu_i = q \quad \text{на } \Gamma_q, \qquad \Gamma_q = \Gamma\setminus\Gamma_\psi. \tag{4}$$

Тут $\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – коефіцієнти турбулентної дифузії, що задовольняють звичайні властивості симетрії та еліптичності

$$\begin{cases} \mu_{ij} = \mu_{ji}, \\ \mu_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu_0\xi_i\xi_i, \quad \mu_0 = \mathrm{const} > 0 \quad \forall \xi_i \in R, \end{cases} \tag{5}$$

$\sigma \geq 0$ – коефіцієнт погли ня домішки, $q = q(x)$ – відома функція, що опису потік домішки через поверхню Γ_q. У співвідношеннях /2/, /4/, /5/ за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування від I до n.

Детально формулювання адач про міграцію домішок в атмосфері та доведення єдиності їх розв"язків пророблено в праці /3/.

Вважатимемо, що наявні включення

$$\sigma \in L^\infty(\Omega), \quad q \in L^2(\Gamma_q),$$
$$\{\mu_{ij}\} \subset L^\infty(\Omega). \tag{6}$$

2. Варіаційна задача та її розв"язуваність

Введемо простір допустимих функцій

$$\Phi = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = 0, \quad \text{на } \Gamma_\psi\}$$

та спряжений до нього простір Φ', норму в якому будемо позначати символом $\|\ \|_*$.

Розглянемо наступну варіаційну задачу:

Задано $u \in U$, $f \in H$, $q \in L^2(\Gamma_q)$.

Знайти функцію $\psi \in \Phi$ таку, що

$$a(\psi,\varphi) + b(\psi,\varphi) = \langle l,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in \Phi. \tag{7}$$

Тут

$$a(\psi,\varphi) = \int_\Omega \left\{\mu_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \sigma\varphi\psi\right\}dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\psi}\psi\varphi u_i\nu_i\, d\gamma$$

$$b(\psi,\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega\left\{\varphi\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi u_i) - \psi\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi u_i)\right\}dx \tag{8}$$
$$\langle l,\varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi\, dx - \int_{\Gamma_q} q\varphi\, d\gamma \qquad \forall\psi,\varphi \in \Phi.$$

Неважко перевірити, що розв"язок задач /2/-/4/ /якщо він існує/ одночасно є розв"язком варіаційної задачі /7/. Більше того, наявна.

Т е о р е м а /про коректність варіаційної задачі/

Нехай дані задачі /2/-/4/ характеризуються властивостями /1/, /5/ та /6/. Тоді варіаційна задача /7/ допускає єдиний розв"язок у просторі Φ, і при цьому

$$\|\psi\|_{1,\Omega} \leqslant a_0^{-1} \|l\|_* \qquad a = const > 0 \tag{9}$$

Д о в е д е н н я. Зі залученням теореми 1.2.1 /Сьярле /8// легко довести існування додатної константи a_0 такої, що

$$a_0 \|\varphi\|^2_{1,\Omega} \leqslant a(\varphi,\varphi) \qquad \forall \varphi \in \Phi. \tag{10}$$

Тому симетрична неперервна білінійна форма $a(\cdot,\cdot): \Phi \times \Phi \to \mathbb{R}$ визначає скалярний добуток на Φ і норму

$$\|\varphi\|_\Phi = a^{\frac{1}{2}}(\varphi,\varphi) \qquad \forall \varphi \in \Phi, \tag{11}$$

еквівалентну нормі $\| \ \|_{1,\Omega}$. Далі, завдяки властивості кососиметричності неперервної білінійної форми $b(\cdot,\cdot): \Phi \times \Phi \to \mathbb{R}$ що виражається рівністю

$$b(\varphi,\psi) = -b(\psi,\varphi) \qquad \forall \varphi,\psi \in \Phi, \tag{12}$$

білінійна форма

$$A(\psi,\varphi) = a(\psi,\varphi) + b(\psi,\varphi) \quad \forall \psi,\varphi \in \Phi \tag{13}$$

є неперервною та Φ -еліптичною.

Більше того, з означення /8/, включень /1/ та /6/ випливає неперервність лінійного функціонала l на Φ, тобто

$$l \in \Phi'. \tag{14}$$

Таким чином, існування єдиного розв"язку ψ у просторі Φ є безпосереднім наслідком властивостей /13/, /14/ та леми Лакса-Мільграма /8/. Остаточно з оцінок

$$a_0 \|\psi\|^2_{1,\Omega} \leqslant A(\psi,\psi) = \langle l, \psi \rangle \leqslant \|l\|_* \|\psi\|_{1,\Omega}$$

випливає /9/.

3. Дискретизація Гальоркіна

Для розв"язування задачі /7/ скористаємось методом Гальоркіна /5/. З цією метою виберемо послідовність скінченновимірних

8-3036

підпросторів $\{\Phi_h\}$ з Φ таку, що

$$dim\ \Phi_h = N(h) = N \to \infty \quad \text{при } h \to 0, \tag{15}$$

$\bigcup\limits_{h>0} \Phi_h$ щільно вкладено в Φ.

Для кожного фіксованого значення параметра дискретизації $h>0$ визначимо апроксимацію Гальоркіна $\psi_h \in \Phi_h$ для розв"язку ψ задачі /7/ як розв"язок наступної задачі:

Задано $u \in U$, $l \in \Phi'$.

знайти $\psi_h \in \Phi_h$ таку, що /16/

$$A(\psi_h, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \Phi_h .$$

Якщо виконується умова теореми, тоді існує єдиний розв"язок задачі /16/, причому

$$\|\psi_h\|_{1,\Omega} \leq a_0^{-1} \|l\|_* \qquad \forall h>0. \tag{17}$$

Більше того, якщо зафіксувати деякий базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ простору Φ_h, тоді структура апроксимації Гальоркіна однозначно визначається розкладом

$$\psi_h(x) = \sum_{j=1}^N P_j\, \varphi_j(x) \tag{18}$$

з невідомими поки що коефіцієнтами $\{P_j\}_{j=1}^N$. Для визначення останніх підставимо /18/ у рівняння задачі /16/ і послідовно візьмемо $\varphi = \varphi_i$, $i=1,\ldots,N$. У результаті прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^N A(\varphi_j, \varphi_i) P_j = \langle l, \varphi_i \rangle \qquad i=1,\ldots,N \tag{19}$$

відносно невідомих $\{P_j\}_{j=1}^N$. Зауважимо, що внаслідок властивості /13/

матриця $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^N = \{A(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$

додатно визначена для кожного $h>0$, /20/

тому система /19/ однозначно визначає коефіцієнти розкладу /18/ апроксимації Гальоркіна $\psi_h \in \Phi_h$ на кожного $h>0$.

Підкреслимо також, що з огляду на /17/ апроксимації $\{\psi_h\}$ утворюють обмежену послідовність з Φ, тому з неї можна вибрати збіжну до розв"язку $\psi \in \Phi$ задачі /7/ підпослідовність.

4. Збіжність апроксимацій методу скінченних елементів

Для оцінки швидкості збіжності до нуля похибки апроксимації Гальоркіна

$$e_h = \psi_h - \psi$$

скористаємось припущенням, що простори апроксимацій Φ_h володіють такими властивостями:

для кожного $\psi \in \Phi \cap H^{k+1}(\Omega),\ k \geqslant 0$, знайдуться $\varphi \in \Phi_h$ та $C_0 = const > 0$, значення якої не залежить від h та ψ, такі, що

$$\|\psi - \varphi\|_{m,\Omega} \leqslant C_0 h^{k+1-m} \|\psi\|_{k+1,\Omega}, \quad 0 \leqslant m \leqslant k. \qquad /21/$$

Зауважимо, що такими інтерполяційними властивостями, як правило, володіють простори кусково-поліноміальних функцій методу скінченних елементів / 5-8 /. При цьому роль параметра h відіграє діаметр сітки скінченних елементів, а натуральне число k визначає максимальний порядок полінома, що може бути представлений функціями базиса в межах скінченного елемента.

Т е о р е м а /про збіжність наближених розв"язків/

Нехай існує таке натуральне $k \geqslant 1$, що розв"язок ψ варіаційної задачі /7/ характеризується включенням

$$\psi \in \Phi \cap H^{k+1}(\Omega).$$

Тоді послідовність апроксимацій Гальоркіна $\{\psi_h\}$ при $h \to 0$ збігається до розв"язку ψ задачі /7/ і при цьому наявна оцінка

$$\|\psi_h - \psi\|_{1,\Omega} \leqslant C h^k \|\psi\|_{k+1,\Omega}, \qquad /22/$$

де $C = const > 0$ не залежить від параметра дискретизації h.

Д о в е д е н н я. Зі співвідношень /7/ та /16/ безпосередньо випливає, що

$$A(e_h, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \Phi_h.$$

З урахуванням останньої рівності, а також властивостей білінійної форми $A(.,.)$ знайдемо

$$a_0 \|e_h\|^2_{1,\Omega} \leqslant A(e_h, e_h) = A(e_h, \psi_h - \varphi + \varphi - \psi) =$$
$$= A(e_h, \varphi - \psi) \leqslant$$
$$\leqslant M \|e_h\|_{1,\Omega} \|\varphi - \psi\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in \Phi_h,$$

де $M>0$ – константа неперервності форми $A(\cdot,\cdot)$. Таким чином,

$$\|\psi_h - \psi\|_{1,\Omega} \leqslant a_0^{-1} M \inf_{\varphi \in \Phi_h} \|\psi - \varphi\|_{1,\Omega} . \qquad /23/$$

Звідки з урахуванням /2I/ отримуємо оцінку /22/.

I. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. Л., 1989. 2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М., 1980. 3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М., 1982. 4. Марчук Г.И. Методы расщепления. М., 1988. 5. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981. 6. Никольский М.А., Федоров А.Л., Дорожкин А.И. Численное решение задачи о распространении пассивных примесей в прибрежной зоне моря //Метеорология и гидрология. 1990. №I. С. 57-63. 7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., 1977. 8. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1977. 9. Javandel I., Doughty C., Tsang C.F. Groundwater Transport: Handbook of Mathematical Models. Washington, 1984. 10. Tim U.S., Mostaghini S. Numerical model for predicting pesticide movement through soils under conservation tillage // Annual. Conf. Canad. Soc. Civ. Eng., Calgary, May 25-27. 1988. Montreal, 1988. V.2. P. 499-512.

Стаття надійшла до редколегії I2.02.9I