УДК 519.6

Р.М.Пасічник, Б.А.Остудін

ПОРІВНЯННЯ ДВОХ МЕТОДІВ РОЗВ"ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО РОДУ ТИПУ ХВИЛЬОВОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Нехай потрібно знайти функцію $q(y,t)$, яка задовольняє інтегральне рівняння /ІР/

$$\iint\limits_S q(y,t-r_{xy})\,\theta(t-r_{xy})\,r_{xy}^{-1}\,dS_y = f(x,t) \qquad x\in S \qquad /1/$$

при умовах:

$$f(x,0)=f'_t(x,0)=0 \qquad x\in S; \qquad /2/$$

$$|f(x,\infty)|<\infty \qquad x\in S, \qquad /3/$$

де t – часова змінна у безрозмірній системі координат; x, y – точки тривимірного евклідового простору R^3; $\theta(t)$ – функція Хевісайда; S – деяка Ляпуновська розімкнута або замкнута поверхня; $f(x,t)$ – деяка неперервно-диференційована за змінною t та неперервно-диференційована за Гельдером за змінною x функція.

Згідно з [7] ця задача еквівалентна початково-крайовій задачі для хвильового рівняння з граничною умовою типу Діріхле на поверхні S. При цьому функція f відіграє роль граничної умови, а співвідношення /2/ виражає умову узгодженості. Вказана початково-крайова задача має важливі застосування, зокрема при моделюванні акустичних процесів. Її розв"язок пов"язаний з розв"язком $q(x,t)$ задачі /1/-/3/ за поданням

$$u(x,t)=\iint\limits_S q(y,t-r_{xy})\,\theta(t-r_{xy})\,r_{xy}^{-1}\,dS_y \qquad x\in R^3\setminus S. \qquad /4/$$

Це подання та співвідношення /1/-/3/ є універсальними, оскільки вони справедливі як для замкнутої, так і розімкнутої поверхонь S.

Методи, що застосовуються до розв"язання нестаціонарних задач, передбачають виділення двох етапів: переходу від нестаціонарної задачі до послідовності стаціонарних /етап стаціонаризації/, а також етапу розв"язання послідовності стаціонарних задач. Для порівняльного дослідження методів стаціонаризації ми вибрали методи кусково-лінійної апроксимації за часовою змінною [3] та інтегральних перетворень Чебишева-Лагерра [2], [5], які належать до таких двох великих груп, як проекційні методи за часовою змінною та інтегральн-

10-3036

них перетворень. Перший метод з групи проекційних виділяється простотою, а другий - легкістю побудови оригіналу.

Розглянемо детальніше процес стаціонаризації за допомогою методу перетворень Чебишева-Лагерра. Застосовуємо до IP /I/ інтегральні перетворення Чебишева-Лагерра з ядрами вигляду $e^{-\text{æ}t} L_n(\text{æ}t)$ на інтервалі від 0 до ∞, де $L_n(t)$ - поліном Чебишева-Лагерра степеня n, æ - деякий числовий параметр. Використовуючи властивості поліномів Чебишева-Лагерра, результат перетворень можемо записати у вигляді / [5], [6] /:

$$\iint\limits_S e^{-\text{æ} r_{xy}} r_{xy}^{-1} Q_n^{\text{æ}}(y) dS_y = G_n^{\text{æ}}(x) \qquad n=\overline{0,N} \qquad x \in S,$$

$$G_n^{\text{æ}}(x) = \begin{cases} F_0^{\text{æ}}(x) & n=0, \\ F_n^{\text{æ}}(x) - \iint\limits_S e^{-\text{æ} r_{xy}} r_{xy}^{-1} \sum\limits_{m=0}^{n-1} c_{n-m}(\text{æ} r_{xy}) Q_m^{\text{æ}}(y) dS_y & n \neq 0, \end{cases} \qquad /5/$$

$$F_n^{\text{æ}}(x) = \int_0^\infty e^{-\text{æ}t} L_n(\text{æ}t) f(x,t) dt,$$

$$Q_n^{\text{æ}}(x) = \int_0^\infty e^{-\text{æ}t} L_n(\text{æ}t) q(x,t) dt,$$

$$c_{n-m}(x) = L_{n-m}(x) - L_{n-m-1}(x).$$

Завдяки ортогональності та повноті системи поліномів Чебишева-Лагерра отримуємо наближену рівність для побудови шуканої функції $q(x,t)$

$$q(x,t) \approx \text{æ} \sum_{n=0}^{N} Q_n^{\text{æ}}(x) L_n(\text{æ}t). \qquad /6/$$

Рівність /6/ перетворюється в точну при $N \to \infty$. Встановимо умови рівномірності такого прямування. Припустимо, що задача /I/-/3/ поставлена коректно. Оскільки функція $f(x,t)$ обмежена при $t \to \infty$, то й густина $q(x,t)$ у регулярних точках поверхні S повинна мати таку ж властивість. З цього випливає, що добуток $(q'(y,t))^2 t$ обмежений при $t \to \infty$ і що інтеграли

$$\int_0^\infty e^{-t} q^2(y,t) dt, \qquad \int_0^\infty [q'(y,t)] t e^{-t} dt$$

збіжні в регулярних точках S. А цього досить [4], щоби ряд у правій частині рівності /6/ при $N \to \infty$ збігався до шуканої густини рівномірно за t на довільному відрізку $[t_1, t_2] \subset [0, \infty)$

у регулярних точках поверхні S. Таким чином, розв"язавши послідовність стаціонарних ІР /5/ відносно $Q_n^{\infty}(y)$ за допомогою формули /6/ можемо знайти наближене значення шуканої густини.

Розглянемо процес стаціонаризації за допомогою методу кусково-лінійної апроксимації та колокації за часовою змінною. Будемо шукати розв"язок ІР /І/ на деякому скінченному часовому інтервалі / 0,T /. Покриємо цей інтервал рівномірною сіткою з кроком $h_{(t)}$. Невідому густину $q(x,t)$ апроксимуємо за допомогою кусково-лінійних функцій:

$$q(x,t) \approx Q^{k+1}(x)\,\Phi^{1}_{t,k}(t) + Q^{k}(x)\,\Phi^{0}_{t,k}(t) \quad t\in[t_k, t_{k+1}],\ k=\overline{1,n_t}, \quad /7/$$

$$\Phi^{\ell}_{t,k}(t)=\begin{cases} \dfrac{t_{k+1}-t}{h_t} & \ell=0, \\ \dfrac{t-t_k}{h_t} & \ell=1 \end{cases} \qquad t\in[t_k, t_{k+1}],$$

$$Q^{k}(x)=q(x,t_k), \qquad t_k=(k-1)h_t .$$

Зі співвідношення $f'_t(x,0)=0$ та властивості хвильового потенціалу простого шару [І] випливає, що $q(y,0)=Q^1(y)=0$. Для довільної точки $x\in S$ визначимо допоміжне розбиття поверхні S :

$$S_1(x)=\{y\in S \mid r_{xy}\le h_t\}, \quad S_2(x)=S\setminus S_1(x).$$

Неважко помітити, що множина $S_1(x)$ включає ті точки поверхні S, для яких значення запізнюючого часового аргумента $t_{n+1}-r_{xy}$ при довільному значенні n не виходить за межі інтервалу $[t_n, t_{n+1}]$. Вимагаючи задоволення ІР /І/ лише у вузлах часової сітки ω_t доходимо до наступної послідовності стаціонарних ІР:

$$\iint\limits_{S_1(x)} Q^{n+1}(y)\,\Phi^{1}_{t,n}(t_{n+1}-r_{x,y})\,\theta(t_{n+1}-r_{xy})\,r_{xy}^{-1}\,dS_y = G(x,t_{n+1}) \quad x\in S,\ n=\overline{1,n_t} \quad /8/$$

$$G(x,t_{n+1})=\begin{cases} f(x_1,t_2) & n=1, \\ f(x,t_{n+1})-\iint\limits_{S_1(x)} Q^{n}(y)\Phi^{0}_{t,n}(t_{n+1}-r_{xy})\theta(t_{n+1}-r_{xy})r_{xy}^{-1}\,dS_y - \\ -\sum\limits_{\ell=0,1}\iint\limits_{S_2(x)} Q^{k+\ell}(y)\Phi^{\ell}_{t,k}(t_{n+1}-r_{xy})\theta(t_{n+1}-r_{xy})r_{xy}^{-1}\,dS_y & n\ne 1, \end{cases}$$

$$k=\left[\frac{t_{n+1}-r_{xy}}{h_t}\right], \qquad Q^1(y)=0$$

Розв"язавши отриману послідовність стаціонарних ІР відносно функцій $\mathfrak{I}^n(y)$ шукану густину будуємо за допомогою співвідношення /7/.

Таким чином, використання вказаних методів дає змогу задачу /1/-/3/ звести до послідовностей стаціонарних ІР вигляду /5/ або /6/ зі слабкими особливостями в ядрах. Подальший шлях розв"язання цих стаціонарних ІР подібний і відбувається за допомогою методу колокації та кусково-лінійної апроксимації по просторових змінних [5], [6]. В результаті приходимо до послідовностей систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Кожна з систем такої послідовності відрізняється від інших лише правою частиною, для обчислення якої використовуються коефіцієнти апроксимації густини $q(x,t)$, знайдені на попередніх кроках. Тому, щоб уникнути перерахунків, матрицю систем доцільно розкласти на добуток матриць. Із цією ж метою заздалегідь обчислюються допоміжні вектори, які дають змогу формувати праві частини систем лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи скалярні добутки цих векторів на коефіцієнти апроксимації густини. При організації цих обчислень виявляються суттєві відмінності між розглядуваними методами. Особливість методу перетворень Чебишева-Лагерра полягає в усуненні запізнення за змінною t, за рахунок чого спрощується алгоритм формування матриці й допоміжних векторів порівняно з методом часової колокації. Однак матриця й допоміжні вектори останнього методу є розрідженими, і тому містять значно менше ненульових коефіцієнтів, ніж аналогічні структури методу Чебишева-Лагерра.

Розв"язання стаціонарних задач за допомогою методу колокації дає змогу проводити апостеріорну оцінку похибки задоволення граничної умови задачі по нев"язці ІР /1/ у точках, які не збігаються з колокаційними. Оскільки решта умов висхідної початково-крайової задачі за поданням /4/ задовольняються точно, то вказана похибка і характеризуватиме точність побудованого розв"язку. Така характеристика використовується при розв"язанні більшості задач, для яких не побудовано аналітичних розв"язків.

Описані методи реалізовані для осесиметричного випадку у вигляді прикладних програм, що дало змогу експериментально зіставити їхню ефективність на розв"язанні ряду задач. При розв"язанні цих задач використовувалось 30 просторових точок колокації, а для достатньої точності апроксимації розв"язку методом перетворень Чебишева-Лагерра - поліноми Чебишева-Лагерра до 30-го порядку /№ 30/. Було також встановлено, що підбір оптимальних значень параметрів $\varkappa$

/у методі інтегральних перетворень/ та h_t /у методі кусково-лінійної апроксимації /дає змогу покращити точність задоволення граничної умови.

П р и к л а д І. Розглянемо модельну задачу, коли межова поверхня S – сфера одиничного радіуса, гранична функція $f_1(t)$ не залежить від просторової змінної, а її часовим профілем є B -сплайн одиничної амплітуди й тривалості d. У цьому випадку розв"язок початково-крайової задачі з граничною умовою типу Діріхле визначається за формулою

$$u(x,t) = f_1(t-|x|+1)/|x|.$$

Результати обчислень зведемо у таблицю.

Таблиця І

d	$\varkappa$	n_t	R	$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \cdot 10^5$	R	$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \cdot 10^5$
8	I	24	0,I	860	7	I0	86	I
4	2	25	0,I	4300	260	I0	420	2I
I	–	I7	0,I	–	I200	I0	–	I70

Тут d – тривалість граничного імпульсу; R – відстань точки спостереження від межової поверхні; $u_{АН}$ – аналітичний розв"язок; u_1, ε_1 – наближений розв"язок та похибка методу перетворень Чебишева-Лагерра; u_2, ε_2 – розв"язок та похибка методу кусково-лінійної апроксимації.

П р и к л а д 2. Граничною поверхнею для цієї задачі служить диск одиничного радіуса. Гранична функція $f_2(t)$ знову не залежить від просторової змінної, але не є фінітною: на часовому інтервалі $[0,2]$ вона є лівою половиною одиничного B – сплайна тривалості 4, а при $t \geq 2$ – тотожно дорівнює І. Розв"язок цієї задачі зіставляється з аналітичним розв"язком стаціонарної задачі Діріхле для рівняння Лапласа при тій же межовій поверхні та граничній функції, що тотожно дорівнює І. Цей аналітичний розв"язок задається формулою

$$u_{АН}(r,z) = \frac{2R_D}{\pi} \arcsin\left[\frac{2R_D}{\sqrt{(R_D-r)^2+z^2}+\sqrt{(R_D+r)^2+z^2}}\right],$$

де R_D – радіус диска; (r,z) – координати точки спостереження у циліндричній системі координат. Порівняння нестаціонарного розв"язку з аналітичним дає змогу спостерігати процес виходу розв"язку на стаціонарний режим. При побудові наближених розв"язків встановлено такі оптимальні значення парамзтрів : $\varkappa = 2$, $n_t = 30$.

Таблиця 2

Порівняння наближених розв"язків з аналітичним
у точці /r = 0, z = I/, розташованій на осі симетрії

t	$u_{Ан}$	u_1	u_2	$\varepsilon_1 \cdot 10^3$	$\varepsilon_2 \cdot 10^3$
4,0	0,5	0,49	0,496	I0	4
4,5	0,5	0,5I2	0,500	I2	0
5,0	0,5	0,507	0,50I	7	I
5,5	0,5	0,50I	0,503	I	3
6,0	0,5	0,5I4	0,502	I4	2
6,5	0,5	0,5I5	0,499	I5	I
7,0	0,5	0,495	0,50I	5	I

П р и к л а д 3. Межовою поверхнею наступної задачі є сфера одиничного радіуса, з центром у початку координат, яка містить круглий отвір. При цьому краї отвору із центра сфери видно під кутом 45°. Гранична функція знову не залежить від просторової координати, а за часовою змінною становить B -сплайн тривалості 8 з одиничною амплітудою. Максимальні похибки задоволення граничної умови контролювались на часовому інтервалі [0,I2] і становили ε_1 =0,0I4, ε_2 = 0,007.

Щоб повністю порівняти ефективність методів, слід врахувати, що метод апроксимації та колокації при розв"язанні наведених задач вимагав значно менше /на порядок/ машинного часу, ніж метод перетворень. Отже, і за точністю, і за економією машинного часу, метод апроксимації та колокації переважає над методом перетворень Чебишева-Лагерра, а тому перший з них доцільніше використовувати при розв"язанні складніших, зокрема суттєво-просторових задач.

Таким чином, розглянуто два методи розв"язання задачі /I/-/3/ д. IP першого роду типу хвильового потенціалу: метод інтегральних перетворень та метод кусково-лінійної часової апроксимації і колокації. Обидва методи дають змогу розв"язувати задачу для широкого класу поверхонь складної форми. При зіставленні ефективності методів при розв"язанні ряду модельних задач можна дійти висновку про значно більшу ефективність методу кусково-лінійної апроксимації та рекомендувати його для розв"язання задач із складнішими межовими поверхнями.

I. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. М., I98I. 2. Г а л а з ю к В.А. Метод полиномов Чебышева-Лагерра в смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами//Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 1. С.3-6. 3. Гладков А.А. Численное решение задач о применением интегральных уравнений для волновых поверхностных потенциалов //Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1980. Т.20. № 2. С.522-528. 4. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М., 1984. 5. Остудин Б.А., Пасичник Р.М. Использование метода граничных интегральных уравнений для определения акустического поля, отраженного от мягкой осесимметричной оболочки //Волны и дифракция: Мат. IX Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Тбилиси, 1985. Т.1. С.125-128. 6. Остудин Б.А., Пасичник Р.М. Численное решение осесимметричной задачи Дирихле для волнового уравнения методом интегральных преобразований. Львов, 1986. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2179-Ук86. 7. Пасичник Р.М. Численное решение смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения методом интегральных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1989.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.91

УДК 518.5

Б.О.Попов

РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ СПЛАЙНАМИ /ВЛАСТИВОСТІ ТА АЛГОРИТМИ/

Для одночасного точного та швидкого обчислення на ЕОМ різноманітних функцій $f(x) \in C^{m+2}[a,b]$ необхідно розділити проміжок наближення $[a,b]$ на r частин точками $a=z_0<z_1<\dots<z_r=b$ та знайти на кожній з цих частин $[z_{i-1}, z_i]$, $i=\overline{1,r}$ свій вираз

$$F(A_i,x)=F(a_0^{(i)},a_1^{(i)},\dots,a_m^{(i)},x).$$

Найменша максимальна похибка μ на всьому проміжку $[a,b]$ при цьому одержується тоді, коли максимальні похибки μ_i:

$$\mu_i=\inf_{A_i}\max_{x\in[z_{i-1},z_i]}\left|[f(x)-F(A_i,x)]/w(x)\right|,\quad i=\overline{1,r}$$

на кожній з частин $[z_{i-1},z_i]$ проміжка $[a,b]$ рівні між собою: $\mu_i=\mu$. Тут $W(x)\in C[a,b]$, $W(x)\neq 0$ – вага наближення.

Таке наближення звемо рівномірним наближенням чебишовськими сплайнами. Наближення має $M=(m+2)r-1$ невідомих параметрів: $(m+1)r$ – це параметри $\{A_i\}_{i=1}^{r}$ виразів $F(A_i,x)$, $i=\overline{1,r}$, що наближають функцію $f(x)$ та $(r-1)$ – вузли $z=\{z_i\}_{i=1}^{r-1}$ сплайна $S(x)$. Донедавна усі вказані невідомі знаходилися внаслідок багато-